Raisonnements et vocabulaire ensembliste & Compléments de calcul algébrique

Questions de cours

Proposition 1

A démontrer

Soient E, F des ensembles.

$$E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$$

Proposition 2

A démontrer

Soient E un ensemble, A, B des parties de E. Alors

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \quad \text{et} \quad A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$$

Exemple 3

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Théorème 4

Principe de récurrence - A énoncer et à démontrer

Soit $P(n)$ un prédicat dépendant d'un paramètre n entier naturel. Si $P(0)$ est vraie et « $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \implies P(n+1)$ » est vraie alors « $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ » est vraie.

Proposition 5

Enoncer les formules et en démontrer une au choix du colleur

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exemple 6

Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

Proposition 7

Enoncer les propriétés et en démontrer une au choix du colleur

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- formule de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,
- les coefficients binomiaux sont entiers : $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Proposition 8

Formule du binôme de Newton - A énoncer et à démontrer

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Points du programme officiel abordés

Raisonnements et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Recouvrement disjoint, partition.	

Compléments de calcul algébrique

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	**Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.**
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.