Trigonométrie & Systèmes linéaires de petite taille

Questions de cours

Proposition 1

Enoncer les deux formules et démontrer l'une des deux

- (Somme géométrique) Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (Factorisation) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

Proposition 2

Formule du binôme de Newton - A énoncer et à démontrer

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple 3

Exercice du TD

Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k) \binom{n}{k}$.

Proposition 4

Formules d'addition - A énoncer et démontrer géométriquement la première

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Si, de plus, $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ainsi que $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ pour la première et $a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ pour la seconde,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Les cas particuliers où $a = b$ (duplication) sont à savoir retrouver rapidement également.

Proposition 5

Linéarisation et factorisation - A énoncer et démontrer (deux ou trois)

- (Linéarisation) Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big) \qquad \sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

- (Factorisation) Si $(p,q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Proposition 6

Arc moitié - A énoncer et démontrer

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi[2\pi]$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Si de plus $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple 7

Exercice du TD

Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ la somme $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ est-elle maximale ?

Exemple 8

Résoudre en fonction du paramètre réel m le système à deux inconnues :

$$(S_m)\begin{cases} mx+y &= m-1 \\ x+my &= 3-m^2 \end{cases}$$

Points du programme officiel abordés

Compléments de calcul algébrique

Contenus	Capacités & commentaires
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.