Nombres réels & Nombres complexes (tout début)

Questions de cours

Proposition 1 *Formules d'addition - A énoncer et démontrer géométriquement la première*

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Si, de plus, $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ainsi que $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ pour la première et $a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ pour la seconde,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Les cas particuliers où $a = b$ (duplication) sont à savoir retrouver rapidement également.

Proposition 2 *Arc moitié - A énoncer et démontrer*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi[2\pi]$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Si de plus $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple 3 *Exercice du TD*

Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ la somme $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ est-elle maximale ?

Exemple 4 *Exercice du TD*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exemple 5

Exercice du TD

Montrer qu'il existe un polynôme de degré 4 solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = x^4 + x - 1$$

Proposition 6

A énoncer, à démontrer et donner l'interprétation sur la droite réelle

Soit x, a des réels et r réel positif. On a :

$$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a-r \leq x \leq a+r$$

Proposition 7

Propriétés de la valeur absolue - Inégalité triangulaire et cas d'égalité à démontrer

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| = |-x|$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$
(iii) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad |xy| = |x|\,|y|$
(iv) (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$
(v) (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|x+y| = |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq xy$$

Points du programme officiel abordés

Nombres réels

Contenus	Capacités & commentaires
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x-a| \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Nombres complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	