

Compléments sur les réels & Nombres complexes

Questions de cours

Théorème 1

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ - A énoncer et démontrer

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q est le **quotient** et r est le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Proposition 2

Existence et unicité de la partie entière - A énoncer et à démontrer

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$, c'est-à-dire $x - 1 < n \leq x$.

On en déduit que $\mathbb{R}$ est **archimédien** i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$M < n \times \varepsilon$$

Proposition 3

Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - A énoncer et à démontrer

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4

Inégalités triangulaires - A énoncer et à démontrer

Soient z et z' deux nombres complexes. On a

$$||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

Cas d'égalité :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff z = 0 \text{ ou il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } z' = \lambda z$$

On dit alors que z et z' sont **positivement liés**.

Exemple 5

Technique de l'angle moitié

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $C = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb)$ et $S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$.

Cas particuliers de la technique de l'angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Théorème 6*Equations du second degré - A énoncer et à démontrer*

Soit l'équation du second degré, d'inconnue z , $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
On définit le discriminant de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$.

- 1 Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution qui vaut $z_0 = -\frac{b}{2a}$ et alors $az^2 + bz + c = 0 = a(z - z_0)^2$.
- 2 Si $\Delta \neq 0$, on note δ **une** racine de Δ . Il y a deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Proposition 7*Premiers résultats de géométrie - A énoncer et à démontrer*

Soient A, B des points du plan d'affixe $a, b \in \mathbb{C}$, et C un point d'affixe $c \in \mathbb{C}$, distinct de A et B .

- $\frac{a-c}{b-c}$ a pour module $\frac{CA}{CB}$ et pour argument une mesure de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$
- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\frac{a-c}{b-c} \in i\mathbb{R}$

Proposition 8*Ecriture des similitudes - A énoncer et à démontrer*

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $f = id$.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, il existe un unique point fixé par f i.e. un unique $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = z_0$, et f est la composée **commutative** de
 - $r_{\Omega, \arg a}$, rotation de centre $\Omega(z_0)$ et d'angle $\arg a$,
 - et de $h_{\Omega, |a|}$, homothétie de centre $\Omega(z_0)$ et de rapport $|a|$,

i.e.

$$f = r_{\Omega, \arg a} \circ h_{\Omega, |a|} = h_{\Omega, |a|} \circ r_{\Omega, \arg a}$$

Points du programme officiel abordés

Compléments sur les nombres réels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Notations $\sup X, \inf X$.

Nombres complexes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.
Opérations sur les nombres complexes.
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.
Module.
Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Image du conjugué dans le plan complexe.
Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.
Exponentielle d'une somme.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Notation $\mathbb{U}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.
Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.
Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.
Exponentielle d'une somme.
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
L'étude générale des similitudes est hors programme.