Rappels et compléments sur les fonctions & Compléments sur les nombres réels

Questions de cours

Théorème 1 *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ - A énoncer et à démontrer*

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

q est le **quotient** et r est le **reste** de la division euclidienne de a par b.

Proposition 2 *Existence et unicité de la partie entière - A énoncer et à démontrer*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, c'est-à-dire $x - 1 < n \leqslant x$.

On en déduit que $\mathbb{R}$ est **archimédien** i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$M < n \times \varepsilon$$

Proposition 3 *Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - A énoncer et à démontrer*

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4 *Caractérisation de la borne supérieure - A énoncer et à démontrer*

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée.
Pour $M \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x \end{cases}$$

Théorème 5 *Théorème de la bijection - A énoncer seulement*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que

- f **continue** sur I
- f **strictement monotone** sur I

Alors

- Pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution i.e. f réalise (ou induit) une bijection de I sur $J = f(I)$.
- La bijection réciproque f^{-1} est continue et de même monotonie que f.

Décrire J en fonction de la monotonie de f et de la forme de l'intervalle I.

Théorème 6 *Dérivée de la réciproque - A énoncer seulement*

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles. Soit $f : I \longrightarrow J$ telle que

- f est une fonction bijective
- f est dérivable sur I
- f' **ne s'annule pas sur** I

alors

- f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Si pour un $x \in I$, $f'(x) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x)$ et la courbe représentative de f^{-1} admet en $f(x)$ une demi-tangente verticale.

Définition 7 *A énoncer*

Donner les définitions, les dérivées et les graphes des fonctions $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ ainsi que $\arccos, \arcsin, \arctan$.

Points du programme officiel abordés

Compléments sur les nombres réels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.

Rappels et compléments sur les fonctions

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en oeuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation,*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu,*
- *le calcul de dérivées.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; **ils ne sont pas démontrés à ce stade.** Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	**Résultats admis à ce stade.**

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	**La formule donnant la dérivée est admise**, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.