Rappels et compléments sur les fonctions & Applications (début)

Questions de cours

Exemple 1 *Sous-groupe monogène de $\mathbb{R}$*

Soit A un sous groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $A_+ = A \cap \mathbb{R}_+^*$.

1 Montrer que A_+ n'est pas vide. Justifier que A_+ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$?
On note $a = \mathrm{Inf}(A_+)$.

2 Montrer que si $a > 0$ alors $A = a\,\mathbb{Z}$.

Exemple 2 *Sous-groupe dense de $\mathbb{R}$*

Soit A un sous groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $A_+ = A \cap \mathbb{R}_+^*$.

1 Montrer que A_+ n'est pas vide. Justifier que A_+ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$?
On note $a = \mathrm{Inf}(A_+)$.

2 Montrer que si $a = 0$ alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3 *Théorème de la bijection - A énoncer seulement*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que

- f **continue** sur I
- f **strictement monotone** sur I

Alors

- Pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution i.e. f réalise (ou induit) une bijection de I sur $J = f(I)$.
- La bijection réciproque f^{-1} est continue et de même monotonie que f.

Décrire J en fonction de la monotonie de f et de la forme de l'intervalle I.

Théorème 4

Dérivée de la réciproque - A énoncer seulement

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles. Soit $f : I \longrightarrow J$ telle que

- f est une fonction bijective
- f est dérivable sur I
- f' **ne s'annule pas sur** I

alors

- f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Si pour un $x \in I$, $f'(x) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x)$ et la courbe représentative de f^{-1} admet en $f(x)$ une demi-tangente verticale.

Définition 5

A énoncer

Donner les définitions, les dérivées et les graphes des fonctions $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$ ainsi que $\arccos, \arcsin, \arctan$.

Proposition 6

TCC, à énoncer et à démontrer

Si $\alpha, \beta > 0$,

(i) $\dfrac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

(ii) $|x|^{\alpha} e^{\beta x} \xrightarrow[x \longrightarrow -\infty]{} 0^+$.

(iii) $\dfrac{\ln^{\alpha} x}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0^+$,

(iv) $x^{\beta} |\ln x|^{\alpha} \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} 0^+$.

Proposition 7

A énoncer et à démontrer (la démo ne portera que sur $\exp$ *ou sur* $\ln$*)*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant x + 1$.

(ii) $\exp x \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty \qquad \exp x \xrightarrow[x \longrightarrow -\infty]{} 0 \qquad \dfrac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty \qquad x \exp x \xrightarrow[x \longrightarrow -\infty]{} 0$.

(iii) $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leqslant x$.

(iv) $\ln x \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty\,;\ \ln x \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} -\infty\,;\ \dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0^+\,;\ x \ln x \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} 0^-\,;\ \dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} 1$.

Proposition 8

Image directe - Donner la définition et démontrer 2 points

Définition : soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in A,\ \ y = f(x)$$

Premières propriétés : soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

(i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ (Réciproque fausse)

(ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

(iii) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ égalité fausse en général.

Proposition 9

Image réciproque - Donner la définition et démontrer 2 points

Définition : soit $f : E \longrightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

Premières propriétés : soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

(i) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

(ii) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

(iii) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

(iv) $f^{-1}\left(B^C\right) = f^{-1}(B)^C$

Points du programme officiel abordés

Rappels et compléments sur les fonctions

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en oeuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation,*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu,*
- *le calcul de dérivées.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; **ils ne sont pas démontrés à ce stade.** Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	**Résultats admis à ce stade.**
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	**La formule donnant la dérivée est admise**, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivées d'ordre supérieur.	

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Applications

Contenus	Capacités & commentaires
c) Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.