# Applications et relations & Quelques techniques de calculs de primitives

## Questions de cours

**Exemple 1**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f \in F^E$. Montrer que

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B \text{ si et seulement si } f \text{ surjective.}$$

**Exemple 2**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f \in F^E$. Montrer que

$$\text{pour tout } A \subset E,\ A = f^{-1}\left(f(A)\right) \text{ si et seulement si } f \text{ injective.}$$

**Définition 3** *Facteurs irréductibles - à énoncer seulement*

- Les **facteurs irréductibles sur** $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du types $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Les **facteurs irréductibles sur** $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du types :
  - → $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
  - → $X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, issus du regroupement de deux racines non réelles conjuguées, **ils ont forcément un discriminant strictement négatif.**

**Définition/Théorème 4** *Primitive - Théorème fondamental de l'analyse - à énoncer seulement*

- **Définition :** soit $f$ et $F$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ lorsque
  - → $F$ est dérivable sur $I$,
  - → $F' = f$.
- **Théorème :** soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ continue sur $I$, $a \in I$. Alors

$$F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.
Par ailleurs, pour $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Théorème 5**

*Intégration par parties - à énoncer et à démontrer*

Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$, alors

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Si $a, b \in I$,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 6**

*Changement de variables - à énoncer et à démontrer*

Si $f$ est continue sur $I$ et $\varphi : J \longrightarrow I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$, on peut faire le changement de variable $x = \varphi(t)$ :

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Proposition 7**

*Règles de Bioche - à énoncer*

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$,
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$,
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$,
- sinon, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

**Exemple 8**

Déterminer les primitives de $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$ sur $I = \left]-\pi, \pi\right[$.

⚠ Après la question de cours, et avant de passer aux exercices, tous les élèves devront avoir une fraction rationnelle à décomposer en éléments simples et un calcul de primitive/intégrale.

# Points du programme officiel abordés

## Applications et relations

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **c) Applications et relations** | |
| Application d'un ensemble dans un ensemble.<br>Graphe d'une application. | Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$.<br>Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.<br>Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et $F^E$. |
| Famille d'éléments d'un ensemble. | |
| Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. | Notation $\mathbb{1}_A$. |
| Restriction et prolongement. | Notation $f\|_A$. |
| Image directe. | Notation $f(A)$. |
| Image réciproque. | Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. |
| Composition. | |
| Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. | |
| Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. | Notation $f^{-1}$. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. |
| Relation binaire sur un ensemble. | |
| Relation d'équivalence, classes d'équivalence. | La notion d'ensemble quotient est hors programme.<br>Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent.<br>Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$. |
| Relation d'ordre. Ordre partiel, total. | |

## Quelques techniques de calculs de primitives

**Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.**

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Calcul de primitives** | |
| Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives. | Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.<br>On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue $f$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $f$.<br>On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de $f$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.<br>Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.<br>Intégration par parties, changement de variable. | Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.<br>Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.<br>**Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.** |