Quelques techniques de calculs de primitives & Suites numériques (début)

Questions de cours

Proposition 1

Oubli - A énoncer et à démontrer

Soit E un ensemble. Soit R une **relation d'équivalence** sur E.
Pour $x \in E$, on note $Cl(x)$ la classe d'équivalence de x, le sous ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x.

(i) $\forall x \in E \qquad Cl(x) \neq \emptyset$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2 \qquad xRy \iff Cl(x) = Cl(y)$

(iii) $\forall (x,y) \in E^2 \qquad x\not{R}y \iff Cl(x) \bigcap Cl(y) = \emptyset$

(iv) $E = \bigcup_{x \in E} Cl(x)$

Proposition 2

Parité et périodicité - A énoncer et seul un cas et à démontrer

Parité. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ continue.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Périodicité. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3

Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

Théorème 4

A énoncer seulement

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ fixés. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{K} \\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $(E) : z^2 + az + b = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{K}$.

1 Si $\Delta \neq 0$: (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2. Alors

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2 Si $\Delta = 0$: (E) admet une unique solution r. Alors

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

3 Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$: (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Alors

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

Proposition 5

Unicité de la limite - A démontrer

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est unique.

Proposition 6

Passage des inégalités à la limite - A démontrer

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supposons

- $u \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $v \longrightarrow \ell' \in \mathbb{R}$
- à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$

alors $\ell \leqslant \ell'$.
Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite**.

Théorème 7

Théorème de la limite monotone - A énoncer et à démontrer

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \longrightarrow +\infty$ (respectivement $u \longrightarrow -\infty$).

Théorème 8

Théorème des suites adjacentes - A énoncer et à démontrer

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec u croissante, alors u et v **convergent vers une même limite** $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Points du programme officiel abordés

Quelques techniques de calculs de primitives

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable.	Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. **Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.**

Suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.

e) Suites monotones

Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.