Suites numériques

Questions de cours

Théorème 1 *Théorème de la limite monotone - A énoncer et à démontrer*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \longrightarrow +\infty$ (respectivement $u \longrightarrow -\infty$).

Proposition 2 *A énoncer seulement*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et (h_n) telle que $h_n \longrightarrow 0$.

- $\sin(h_n) \sim h_n$
- $\tan(h_n) \sim h_n$
- $\cos(h_n) - 1 \sim -\dfrac{{h_n}^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $e^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha h_n$
- $\arctan(h_n) \sim h_n$
- $\arcsin(h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{sh}(h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{th}(h_n) \sim h_n$

Exemple 3 *Equivalent des intégrales de Wallis - A démontrer*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$. On admet que $(I_n)_n$ converge en décroissant vers 0 et que cette suite satisfait la relation de récurrence $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
Déterminer un équivalent de l'intégrale I_n de Wallis en étudiant la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 4 *Quelques propriétés des suites extraites - A énoncer et à démontrer*

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Si $u \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ. La réciproque est fausse.

(ii) Si $u_{2n} \longrightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \longrightarrow \ell$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Exemple 5

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et tendant vers 0.

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

Montrer que (S_n) converge.

Théorème 6 *Théorème de Bolzano-Weierstrass - A démontrer*

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Théorème 7 *Théorème de Bolzano-Weierstrass - A démontrer en admettant le cas réel*

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Proposition 8 *Caractérisation séquentielle de la densité - A énoncer et à démontrer*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Points du programme officiel abordés

Quelques techniques de calculs de primitives

Suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\|u_n - \ell\| \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Principe de démonstration par dichotomie.
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	