Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ & Equations différentielles linéaires & Arithmétique (divisibilité et pgcd)

Après chaque question de cours, les élèves auront une EDL d'ordre 1 ou 2 à résoudre ainsi qu'un pgcd et une égalité de Bezout à donner pour deux entiers.
Les exercices pourront ensuite porter sur n'importe quel point du programme de colle (suite numériques, équa diff, début de l'arithmétique).

Questions de cours

Exemple 1

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \exp u_n - 3$.

Théorème 2 *Inégalité des accroissements finis - A énoncer seulement*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $\mathring{I}$ (bornes non comprises),
- il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in \mathring{I},\ \ |f'(x)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in I,\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

Proposition 3 *A énoncer et à démontrer*

Soit (H) l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = 0\ \forall\, x \in I$, avec a continue sur I.
L'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H = \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

où A désigne **une** primitive quelconque de a ($A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$.)

Proposition 4 *Résolution d'une EDL2 à coeff. constants dans $\mathbb{C}$ - A énoncer et à démontrer*

Soit (H) l'équation
$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$
où $a,b\in\mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique
$$r^2+ar+b=0.$$

1. Si $\Delta\neq 0$ notons r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}}=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}\end{array}\right. \mid (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

2. Si $\Delta=0$ notons r_0 la solution de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}}=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & (A+Bx)e^{rx}\end{array}\right. \mid (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Proposition 5 *Résolution d'une EDL2 à coeff. constants dans $\mathbb{R}$ - A énoncer et démontrer le cas $\Delta<0$*

Soit (H) l'équation
$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
On suppose ici que les scalaires a et b sont des nombres réels. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. Si $\Delta>0$ notons r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}}=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}\end{array}\right. \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Si $\Delta=0$ notons r_0 la solution de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}}=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (A+Bx)e^{rx}\end{array}\right. \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

3. Si $\Delta<0$ notons $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}}=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))e^{\alpha x}\end{array}\right. \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Théorème 6 *Théorème de la division euclidienne - A énoncer et à démontrer*

Pour tout $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$, il existe un couple $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ unique tel que $a=b\,q+r$ et $0\leq r<b$.

Théorème 7 *Égalité de Bézout - A énoncer et à démontrer*

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a \wedge b = a\,u + b\,v$$

Une telle relation est appelée **égalité de Bézout**.

Points du programme officiel abordés

Suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Principe de démonstration par dichotomie.

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Equations différentielles

Contenus	Capacités & commentaires
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Arithmétique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.