Structure de groupe, Groupe symétrique & Limite d'une fonction

Questions de cours

Proposition 1 *Image directe/réciproque par un morphisme de groupes - A énoncer et démontrer un point*

Soit $f : (G, \star) \longrightarrow (G', \bullet)$ un morphisme de groupes.

(i) Si H est un sous-groupe de $(G, \star)$, alors $f(H)$ est un sous-groupe de $(G', \bullet)$

(ii) Si H' est un sous-groupe de $(G', \bullet)$, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Cas particulier : $\mathrm{Ker} f$ est un sous-groupe de G et $\mathrm{Im} f$ est un sous-groupe de G'.

Proposition 2 *Support - A démontrer*

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(i) $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est stable par σ.

(ii) Deux permutations à supports disjoints commutent.

Théorème 3 *Décomposition d'une permutation - A énoncer seulement et à savoir appliquer*

- Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
- Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Définition/Théorème 4 *Signature - A énoncer seulement*

- On appelle ***signature*** de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1, 1\}$, où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversion.
  Une permutation σ est dite ***paire*** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite ***impaire*** dans le cas contraire.
- Soit $n \geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{1, -1\}, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

  est l'unique morphisme de groupes de S_n dans $\{1, -1\}$ envoyant toute transposition sur -1.
  En particulier, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

Proposition 5

Groupe alterné - A énoncer et à démontrer

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est appelé ***groupe alterné d'ordre n (ou de degré n).***

Pour tout $n \geqslant 2$, Card $\mathfrak{A}_n = \dfrac{n!}{2}$.

Proposition 6

Unicité de la limite - A énoncer et à démontrer

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Lorsque la limite existe, elle est unique et est alors noté $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Proposition 7

Caractérisation séquentielle de la limite - A énoncer et à démontrer

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall\ (a_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \longrightarrow a,\ \ f(a_n) \longrightarrow \ell.$$

Théorème 8

Limite monotone - A énoncer et démontrer seulement le cas f croissante majorée

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante (respectivement décroissante).

(i) Si f est majorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en b^- (respectivement a^+) et $\lim\limits_{b^-} f = \sup\limits_{]a,b[} f$ (respectivement $\lim\limits_{a^+} f = \sup\limits_{]a,b[} f$).

Sinon, $f(x) \underset{x \longrightarrow b^-}{\longrightarrow} +\infty$ (respectivement $f(x) \underset{x \longrightarrow a^+}{\longrightarrow} +\infty$).

(ii) Si f est minorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en a^+ (respectivement b^-) et $\lim\limits_{a^+} f = \inf\limits_{]a,b[} f$ (respectivement $\lim\limits_{b^-} f = \inf\limits_{]a,b[} f$).

Sinon, $f(x) \underset{x \longrightarrow a^+}{\longrightarrow} -\infty$ (respectivement $f(x) \underset{x \longrightarrow b^-}{\longrightarrow} -\infty$).

Proposition 9

Équivalents usuels en 0 - A énoncer seulement

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé.

- $\sin x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $\tan x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $\cos x - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \alpha x$
- $\arctan x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $\arcsin x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $\operatorname{sh} x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$
- $\tanh x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$

Si $f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$ avec $p \leqslant n$, $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \longrightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Points du programme officiel abordés

Structure de groupe

Contenus	Capacités & commentaires
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
Isomorphisme.	

Groupe symétrique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

Limite d'une fonction

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	