Limite et continuité d'une fonction d'une fonction & Calcul matriciel (début)

Questions de cours

Théorème 1

Limite monotone - A énoncer et démontrer seulement le cas f croissante majorée

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante (respectivement décroissante).

(i) Si f est majorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en b^- (respectivement a^+) et $\lim_{b^-} f = \sup_{]a, b[} f$ (respectivement $\lim_{a^+} f = \sup_{]a, b[} f$).

Sinon, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} +\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$).

(ii) Si f est minorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en a^+ (respectivement b^-) et $\lim_{a^+} f = \inf_{]a, b[} f$ (respectivement $\lim_{b^-} f = \inf_{]a, b[} f$).

Sinon, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} -\infty$).

Proposition 2

Caractérisation séquentielle de la continuité - A énoncer et à démontrer

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

f est continue en $a \Leftrightarrow$ pour tout $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \rightarrow a$, on a $f(x_n) \rightarrow f(a)$

Corollaire 3

Corollaire du T.V.I., image continue d'un intervalle - A énoncer et à démontrer

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 4

des bornes atteintes - A énoncer et démontrer le premier point

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 5*de la bijection - A énoncer seulement*Soit f une fonction, I un intervalle tels que

- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I .

Alors

- f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $J = f(I)$;
- $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f ;
- $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J .

Proposition 6*Produit des matrices élémentaires - A énoncer et à démontrer*

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Proposition 7*Structure d'anneau - A énoncer et démontrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-anneau*Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geq 2$, d'élément unité I_n .
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 8*Définition et propriétés des matrices inversibles - A énoncer seulement*

- On appelle **groupe linéaire** l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles (pour $\times$).

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times B = B \times A = I_n.$$

L'inverse de A est notée A^{-1} .

- Propriétés :

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.(ii) Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.(iii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :

→ A est inversible→ A est inversible à gauche→ A est inversible à droite(v) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

Points du programme officiel abordés

Limite et continuité d'une fonction

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
<p>Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.</p> <p>Unicité de la limite.</p> <p>Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.</p> <p>Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.</p> <p>Limite à droite, limite à gauche.</p> <p>Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).</p> <p>Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.</p> <p>Passage à la limite d'une inégalité large.</p> <p>Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).</p> <p>Théorème de la limite monotone.</p>	<p>Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.</p> <p>Notations $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell, \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.</p> <p>Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.</p>
b) Continuité en un point	
<p>Continuité, prolongement par continuité en un point.</p> <p>Continuité à gauche, à droite.</p> <p>Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.</p> <p>Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.</p>	<p>La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$.</p>
c) Continuité sur un intervalle	
<p>Continuité sur un intervalle.</p> <p>Théorème des valeurs intermédiaires.</p> <p>Image d'un intervalle par une fonction continue.</p> <p>Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.</p> <p>Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.</p> <p>Image d'un segment par une fonction continue.</p> <p>Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.</p>	<p>Principe de démonstration par dichotomie.</p> <p>La démonstration n'est pas exigible.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Breve extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Calcul matriciel (début)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n .
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $GL_n(\mathbb{K})$.
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.