Calcul matriciel et systèmes linéaires & Dérivabilité

Questions de cours

Proposition 1 *Critère d'inversibilité des matrices triangulaires - A énoncer et à démontrer*

Soient $n \geq 1$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
Si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $[T]_{i,i} \neq 0$ alors T est inversible et son inverse est triangulaire supérieure.

Exemple 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

1. Montrer que M n'est pas inversible.
2. Montrer que $I_n - a\,M$ est inversible pour tout $a \in \mathbb{K}$ et donner son inverse.

Proposition 3 *$\mathcal{M}(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ - A énoncer et à démontrer*

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.

Proposition 4 *Dérivée d'une composée - A énoncer et démontrer*

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

Théorème 5 *Dérivée d'une réciproque en un point - A énoncer et démontrer*

Si I, J intervalles, $f : I \longrightarrow J$ bijective, continue sur I et $a \in I$ tel que f est dérivable en a.
Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) = f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$ et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Proposition 6

Formule de Leibniz - A énoncer et démontrer

Soient $f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Définition/Théorème 7

Point critique - A énoncer et démontrer

- Si $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.
- Soit $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f est dérivable en a et f admet un extremum local en a.
  Alors a est un pont critique de f.

  La réciproque est fausse.

Théorème 8

Théorème de Rolle - A énoncer, illustrer et démontrer

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Théorème 9

Théorème des accroissements finis - A énoncer, illustrer et démontrer

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

- f est continue (sur $[a, b]$)
- f est dérivable sur $]a, b[$

Alors

$$\exists\, c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ie $f(b) = f(a) + (b - a) f'(c)$.

Définition/Théorème 10

A énoncer et à démontrer en appliquant l'I.A.F.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

- f est dite **k-lipschitzienne** sur I lorsque

$$\forall\, x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\, |x - y|\,.$$

  Lorsque $k \in [0, 1[$, on dit que f est **contractante**.
- Si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par k, alors f est k-lipschitzienne.

Points du programme officiel abordés

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire.	
Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.

Contenus	Capacités & Commentaires
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents. Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».