

Dérivabilité et convexité & Structure d'anneau et de corps

Questions de cours

Théorème 1

Variation des fonctions dérivables - A énoncer et démontrer un point

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- (i) f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- (ii) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- (iii) f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et $\left\{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

Proposition 2

Caractérisations de la convexité - A énoncer et démontrer une implication

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe sur I .
- (ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

- (iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases} \text{ est croissante}$$

Proposition 3

Caractérisation de la convexité si f dérivable - A énoncer et démontrer le premier point

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

- f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I .
- f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes.

Proposition 4*Inégalité de Jensen - A énoncer et démontrer*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ convexe, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. On a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

En particulier, $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Définition 5

Donner les définitions de :

- anneau et morphisme d'anneau,
- corps et morphisme de corps

Définition 6

Donner les définitions et caractérisations de sous-anneau et sous-corps.

Définition/Théorème 7*Groupe des inversibles - A énoncer et démontrer*

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

- $a \in A$ est dit **inversible** si et seulement s'il est symétrisable pour $\times$.
Son symétrique est appelé **inverse** de a , noté a^{-1} .
On note U_A l'ensemble des inversibles de A .
- $(U_A, \times)$ est un groupe appelé **groupe des inversibles** de A .

Exemple 8

Montrer que tout anneau intègre, commutatif fini est un corps.

Points du programme officiel abordés**Dérivabilité et convexité****Dérivabilité**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas
	$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$
	Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $ f' $ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a .
d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Breve extension des définitions et résultats précédents. Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Convexité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$	
quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I .	
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Structure d'anneau et de corps

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire.
Calcul dans un anneau.	Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Groupe des inversibles d'un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	