Convexité & Polynômes (début)

Questions de cours

Théorème 1 *Caractérisation des polynômes inversibles et associés - A énoncer et à démontrer*

(i) Les polynômes inversibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

(ii) Deux polynômes A et B sont associés si, et seulement si $A|B$ et $B|A$.

Théorème 2 *Division euclidienne - A énoncer et à démontrer*

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ unique tel que

$$A = B\,Q + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(B)$$

Théorème 3 *Factorisation (racines simples) - A énoncer et à démontrer*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Pour $a \in \mathbb{K}$, on a : $P(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-a)|P$

(ii) Si $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distinctes et $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ alors : $(X-a_1)\cdots(X-a_n)|P$

Théorème 4 *Identification des coefficients - A énoncer et à démontrer*

Si deux fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales, alors on peut identifier leurs coefficients.

Théorème 5 *Théorème fondamental de l'arithmétique - A énoncer et à démontrer*

Si A est un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \ldots, P_N$ des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ unitaires deux à deux distincts et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N$ tels que

$$A = \operatorname{cd}(A)\, P_1^{\alpha_1}\, P_2^{\alpha_2} \cdots P_N^{\alpha_N}$$

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. On l'appelle **la décomposition en facteurs irréductibles** de A.

Théorème 6 *Factorisation (racines multiples) - A énoncer et à démontrer*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Si $a_1, \ldots, a_s$ sont racines de P avec pour multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_s$ alors $(X-a_1)^{m_1} \cdots (X-a_s)^{m_s} \mid P$.

Théorème 7 *Formule de Taylor - A énoncer et à démontrer*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

(i) On a

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

(ii) Les coefficients de la formule de Taylor sont uniques, i.e. si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (X-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (X-a)^k$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = b_k$$

Théorème 8 *Caractérisation des racines multiples - A énoncer et à démontrer*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a équivalence entre les affirmations suivantes :

(i) a est une racine de multiplicité m de P

(ii) $\forall k \in [\![0; m-1]\!] \quad P^{(k)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(a) \neq 0$

Points du programme officiel abordés

Convexité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Polynômes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».
Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Contenus	Capacités & Commentaires
PPCM.	Notation $A \vee B$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.