

Polynômes et fractions rationnelles & Dénombrement

Questions de cours

Théorème 1

Factorisation (racines simples) - A énoncer et à démontrer

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- (i) Pour $a \in \mathbb{K}$, on a : $P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a) \mid P$
- (ii) Si $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distinctes et $P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ alors :
 $(X - a_1) \cdots (X - a_n) \mid P$

Théorème 2

Identification des coefficients - A énoncer et à démontrer

Si deux fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales, alors on peut identifier leurs coefficients.

Théorème 3

Théorème fondamental de l'arithmétique - A énoncer et à démontrer

Si A est un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_N$ des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ unitaires deux à deux distincts et $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N$ tels que

$$A = \text{cd}(A) P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_N^{\alpha_N}$$

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. On l'appelle **la décomposition en facteurs irréductibles** de A .

Théorème 4

Factorisation (racines multiples) - A énoncer et à démontrer

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Si $a_1, \dots, a_s$ sont racines de P avec pour multiplicités respectives $m_1, \dots, m_s$ alors $(X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_s)^{m_s} \mid P$.

Théorème 5*Formule de Taylor - A énoncer et à démontrer*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

(i) On a

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

(ii) Les coefficients de la formule de Taylor sont uniques, i.e. si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (X - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (X - a)^k$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = b_k$$

Théorème 6*Caractérisation des racines multiples - A énoncer et à démontrer*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a équivalence entre les affirmations suivantes :(i) a est une racine de multiplicité m de P (ii) $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket \quad P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$ **Théorème 7***Factorisation réelle - A énoncer et à démontrer en admettant le résultat complexe*Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme non constant peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 sans racines réelles.**Théorème 8***Relations racines-coefficients - A énoncer et démontrer le premier point*

- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\prod_{i=1}^n (X - a_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \sigma_{n,n-k}(a_1, \dots, a_n) X^k$$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$, $P = a_0 + \dots + a_n X^n$, **scindé** sur $\mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_n$ ses racines **comptées avec leur multiplicité**, donc $P = a_n (X - x_1) \cdots (X - x_n)$.

En notant σ_k les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \dots, x_n$,

$$P = a_n \left(X^n - \underbrace{\sigma_1}_{\text{somme}} X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \underbrace{\sigma_n}_{\text{produit}} \right).$$

Théorème 9*Interpolation de Lagrange - A énoncer et à démontrer*

Soit n un entier naturel. On se donne :

- $a_0, \dots, a_n, n+1$ scalaires deux à deux distincts
- $b_0, \dots, b_n, n+1$ scalaires quelconques

Il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad L(a_i) = b_i$$

L s'appelle le **polynôme interpolateur de Lagrange associé aux points** $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple 10

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{1+X^3}$.

Proposition 11*Propriétés du cardinal d'un ensemble fini - A énoncer et en démontrer une ou deux*

- Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
- Si A et B deux parties d'un ensemble dont l'une au moins est finie, $A \cap B$ est fini, et, lorsqu'ils existent,

$$\text{Card } A \cap B \leq \min(\text{Card } A, \text{Card } B).$$

- Soit A et B sont des parties finies **disjointes** d'un ensemble E . Alors $A \sqcup B$ est fini et

$$\text{Card } A \sqcup B = \text{Card } A + \text{Card } B$$

- Soit A et B des parties finies de A . Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$$

- Soient E et F des ensembles finis. $E \times F$ l'est aussi, et

$$\text{Card } E \times F = \text{Card } E \times \text{Card } F$$

- Soient E et F des ensembles finis. $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'est aussi, et

$$\text{Card } F^E = \text{Card } F^{\text{Card } E}$$

Proposition 12*Fonctions et cardinal - A énoncer et en démontrer une ou deux*

- Soit f une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F . Alors $f(E)$ est fini et $\text{Card } f(E) \leq \text{Card } E$ avec égalité si et seulement si f est injective.
- Soient E et F des ensembles finis **de même cardinal**. Si f est une application de E dans F , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective, (ii) f est surjective, (iii) f est bijective.

- **Lemme des bergers.** Soient E et F des ensembles finis et f une application de E dans F . Si tous les sous-ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in F$ ont même cardinal p , c'est-à-dire si tout $y \in F$ possède exactement p antécédents, alors $\text{Card } E = p \text{Card } F$.
- Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Proposition 13*Propriétés des coefficients - A énoncer et en démontrer une ou deux combinatoirement*

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

- Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Si a et b sont des éléments d'un anneau A tels que $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Points du programme officiel abordés**Polynômes et fractions rationnelles**

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
Degré d'une somme, d'un produit.	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Composition.	
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants; les autres doivent être retrouvées rapidement.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B . L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
Relation de Bézout.	Notation $A \vee B$.
PPCM.	Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.	
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .	Expression de P . Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i .
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme. Toute technique dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.
Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$.	
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.	

Dénombrement

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $ A $, $\text{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

b) Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.
