Dénombrement
& Analyse asymptotique

Questions de cours

Exemple 1

Polynômes de Tchebychev - Á résoudre

1. Pour $n \in \{0, 1, 2\}$, déterminer un polynôme P_n tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = \widetilde{P_n}(\cos x)$.
2. Démontrer qu'un tel polynôme existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner une relation de récurrence liant P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
3. Préciser le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n (en justifiant rapidement).

Proposition 2

Fonctions et cardinal - A énoncer et en démontrer une ou deux

- Soit f une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F.
Alors $f(E)$ est fini et Card $f(E) \leqslant$ Card E avec égalité si et seulement si f est injective.
- Soient E et F des ensembles finis **de même cardinal**. Si f est une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective, (ii) f est surjective, (iii) f est bijective.

- **Lemme des bergers.** Soient E et F des ensembles finis et f une application de E dans F.
Si tous les sous-ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in F$ ont même cardinal p, c'est-à-dire si tout $y \in E$ possède exactement p antécédents, alors Card $E = p$Card F.
- Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 3

CCINP 112 - A résoudre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Proposition 4

Unicité du DL - A énoncer et à démontrer

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, les cœfficients de celui-ci sont uniques.

Proposition 5

Primitivation de DL - A énoncer et à démontrer

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Théorème 6

Formule de Taylor-Young - A énoncer et à démontrer

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Proposition 7

Développements limités usuels - A énoncer et en démontrer quelques-uns

Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.

Exemple 8

Développement limité de tan

Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de tan.

Points du programme officiel abordés

Dénombrement

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, Card (A). Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Analyse asymptotique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \longrightarrow 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α}, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α} en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.

Contenus	Capacités & Commentaires
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.	
Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.	
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.	
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.