Analyse asymptotique
& Espaces vectoriels (début)

Questions de cours

Proposition 1

Primitivation de DL - A énoncer et à démontrer

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Théorème 2

Formule de Taylor-Young - A énoncer et à démontrer

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Proposition 3

Développements limités usuels - A énoncer et en démontrer quelques-uns

Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.

Exemple 4

Montrer que la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \ln x$ admet une asymptote en $+\infty$. Etudier la position relative de f et de son asymptote.

Théorème 5 *Sous espace vectoriel engendré par une partie - A énoncer et à démontrer*

Soit $(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et A une partie de V.

(i) Il existe un unique sous espace vectoriel de V noté $\text{Vect}(A)$ qui est le plus petit sous espace vectoriel contenant A au sens où : si F est un sous espace vectoriel de V et $A \subset F$ alors $\text{Vect}(A) \subset F$.

(ii) Les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont les combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est-à-dire les vecteurs de la forme $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in A^n$.

Théorème 6 *Somme de deux sous-espaces vectoriels - A énoncer et à démontrer*

(i) Si F et G sont des sous espaces vectoriels de V alors $F + G$ est un sous espace vectoriel de V.

(ii) $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$

Théorème 7 *Caractérisation des espaces en somme directe - A énoncer et à démontrer*

Soit F et G deux sous espaces vectoriels de V.
F et G sont en somme directe si, et seulement si $F \bigcap G = \{0_V\}$.

Définition/Théorème 8 *Projections vectorielles - A énoncer et démontrer*

- Définition.
  Soit F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires de V. Tout vecteur x de V s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle **projections vectorielles** associées à la décomposition $V = F \oplus G$ les applications :

$$p : \begin{array}{rcl} V & \to & V \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \quad \text{et} \quad q : \begin{array}{rcl} V & \to & V \\ x & \mapsto & x_G \end{array}$$

  Plus précisément, p est la **projection sur** F **parallèlement à** G et q est la **projection sur** G **parallèlement à** F.

- Propriétés.

  (i) $F = \{x \in V \mid p(x) = 0_V\}$ et $G = \{x \in V \mid p(x) = x\}$.

  (ii) Les projections vectorielles p et q associées à une décomposition en somme directe sont des applications linéaires, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in V \qquad p(\lambda u + \mu v) = \lambda p(u) + \mu p(v)$$

  (iii) On a $p + q = id_V$, $p \circ p = p$ et $p \circ q = q \circ p = 0$ (application nulle qui à tout vecteur associe le vecteur nul).

Points du programme officiel abordés

Analyse asymptotique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \longrightarrow 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α}, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α} en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.	
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.

Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Contenus	Capacités & Commentaires
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\vec{(}A)$, $\vec{(}x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\vec{(}A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.