Espaces vectoriels

Questions de cours

Proposition 1

Extension d'une famille libre - À énoncer et à démontrer

Soit $u_1, \ldots, u_n$ une famille de vecteurs libres et $u \in E$. On a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) La famille u_1, …, u_n, u est libre.

(ii) $u \notin \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$

Proposition 2

Propriété des familles génératrices - À énoncer et à démontrer

(i) Toute surfamille d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

(ii) Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E. Si $u_1, \ldots, u_m$ est une famille génératrice de F et $u_{m+1}, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de G, alors $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de $F + G$.

Théorème 3

Théorème de la base extraite - À énoncer et à démontrer

Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. Si $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de E alors on peut en extraire une base de E.

Théorème 4

Propriété fondamentale - À énoncer et à démontrer

Soit E un espace vectoriel. Si E admet une famille génératrice de n éléments alors toute famille d'au moins $n + 1$ éléments est liée.

Théorème 5

Caractérisation des bases - À énoncer et à démontrer

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de E. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

(i) La famille $u_1, \ldots, u_n$ est libre.

(ii) $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de E.

(iii) $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E.

Théorème 6 *Propriété de croissance de la dimension - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.

(i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

(ii) Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Théorème 7 *Théorème de la base incomplète - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si $u_1, \ldots, u_p$ est une famille libre de E, alors il existe $n-p$ vecteurs $u_{p+1}, \ldots, u_n$ de E tels que $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E.

Théorème 8 *Existence des supplémentaires - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous espace vectoriel F admet un supplémentaire dans E.

Proposition 9 *Dimension d'une somme directe - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous espaces vectoriels de E en somme directe. Si $e_1, \ldots, e_p$ est une base de F et $e_{p+1}, \ldots, e_s$ est une base de G alors $e_1, \ldots, e_s$ est une base de $F \oplus G$. On a

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Théorème 10 *Formule de Grassmann pour les dimensions - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \bigcap G)$$

Points du programme officiel abordés

Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	