Espaces vectoriels & Probabilités (début)

Questions de cours

Théorème 1 *Théorème de la base extraite - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. Si $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de E alors on peut en extraire une base de E.

Théorème 2 *Propriété fondamentale - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel. Si E admet une famille génératrice de n éléments alors toute famille d'au moins $n+1$ éléments est liée.

Théorème 3 *Caractérisation des bases - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de E. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

(i) La famille $u_1, \ldots, u_n$ est libre.

(ii) $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de E.

(iii) $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E.

Théorème 4 *Propriété de croissance de la dimension - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.

(i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

(ii) Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Théorème 5 *Théorème de la base incomplète - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si $u_1, \ldots, u_p$ est une famille libre de E, alors il existe $n-p$ vecteurs $u_{p+1}, \ldots, u_n$ de E tels que $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E.

Théorème 6 *Existence des supplémentaires - À énoncer et à démontrer*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous espace vectoriel F admet un supplémentaire dans E.

Proposition 7

Dimension d'une somme directe - À énoncer et à démontrer

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous espaces vectoriels de E en somme directe. Si $e_1, \ldots, e_p$ est une base de F et $e_{p+1}, \ldots, e_s$ est une base de G alors $e_1, \ldots, e_s$ est une base de $F \oplus G$. On a

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Théorème 8

Formule de Grassmann pour les dimensions - À énoncer et à démontrer

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \bigcap G)$$

Définition 9

Définitions à énoncer

Rappeler les définitions suivantes :

- système complet d'évènements,
- probabilité,
- probabilité conditionnelle,
- loi d'une variable aléatoire.

Proposition 10

Quelques formules

Enoncer et démontrer une ou plusieurs formules à l'appréciation du colleur

- formule des probabilités composées,
- formule des probabilités totales,
- formule de Bayes.

Définition 11

Lois usuelles

Donner les lois usuelles et une situation-type pour chacune de ces lois.

Exemple 12

CCINP 105

1 Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c. Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Points du programme officiel abordés

Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.

Contenus	Capacités & Commentaires
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

Probabilités sur un univers fini

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	