Probabilités & Intégration (début)

Questions de cours

Exemple 1

CCINP 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   - **a.** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   - **b.** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

     Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Exemple 2

CCINP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Proposition 3

Caractérisation séquentielle d' l'UC - À énoncer et à démontrer

f est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$,

$$x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Théorème 4

de Heine - À énoncer et à démontrer

Tout fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Théorème 5 *Approximation uniforme - À énoncer et à démontrer*

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Proposition 6 *Définition de l'intégrale - À énoncer et à démontrer*

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$. Les ensembles

$$I^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \leqslant f \right\}$$

et

$$I^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \ ; \ \psi \in \mathcal{E}([a,b]), \psi \geqslant f \right\}$$

admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales.

Proposition 7 *Quelques propriétés de l'intégrale - À énoncer et savoir en démontrer une*

Soientt $f, g \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **Linéarité.**
$$\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$
- **Positivité.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
- **Croissance.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \leqslant g$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.
- **Inégalité triangulaire.**
$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$$
où $\displaystyle\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Théorème 8 *Théorème fondamental de l'analyse - À énoncer et à démontrer*

Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème 9 *Théorème de l'intégrale nulle - À énoncer et à démontrer*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ **de signe constant**.

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

Proposition 10 *Inégalité de Cauchy-Schwarz - À énoncer et à démontrer*

Si $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f, g) est liée.

Points du programme officiel abordés

Probabilités sur un univers fini

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)P(Y=y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

Intégration

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	