Intégration & Applications linéaires (début)

Questions de cours

Théorème 1 *Théorème fondamental de l'analyse - À énoncer et à démontrer*

Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème 2 *Théorème de l'intégrale nulle - À énoncer et à démontrer*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ **de signe constant**.

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

Proposition 3 *Inégalité de Cauchy-Schwarz - À énoncer et à démontrer*

Si $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

Théorème 4 *Convergence des sommes de Riemann - À énoncer et à démontrer*

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$, K-lipschitzienne

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

$h(\sigma)$ désignant le pas de σ.

Proposition 5 *Formule de Taylor avec reste intégral - À énoncer et à démontrer*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** $\mathcal{C}^{n+1}$ **sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 6

Inégalité de Taylor-Lagrange - À énoncer et à démontrer

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** $\mathcal{C}^{n+1}$ **sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

où l'on note $[a,x] = \{\lambda a + (1-\lambda)x \mid \lambda \in [0;1]\}$.

Proposition 7

Image et préimage d'un sous espace vectoriel - À énoncer et à démontrer

Soit $f : V \to W$ une application linéaire.

(i) Si H est un sous espace vectoriel de V alors $f(H)$ est un sous espace vectoriel de W.

(ii) Si H' est un sous espace vectoriel de W alors $f^{-1}(H')$ est un sous espace vectoriel de V.

Théorème 8

Caractérisation de l'injectivité et la surjectivité - À énoncer et à démontrer

Soit $f : V \to W$ une application linéaire.

(i) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$.

(ii) f est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}(f) = W$.

Théorème 9

Caractérisation des éléments idempotents - À énoncer et à démontrer

Si f est un endomorphisme idempotent de E alors :

(i) $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f)$

(ii) f est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Théorème 10

Caractérisation des involutions - À énoncer et à démontrer

Si f est un endomorphisme involutif de E alors :

(i) $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$

(ii) f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.

Théorème 11

Image d'une base - À énoncer et à démontrer

Soit $f : V \to W$ une application linéaire et $e_1, \ldots, e_n$ une base de V.

(i) f est injective si, et seulement si $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est libre.

(ii) f est surjective si, et seulement si $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une famille génératrice de W.

(iii) f est bijective si, et seulement si $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une base de W.

Points du programme officiel abordés

Intégration

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.	
Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
d) Sommes de Riemann	
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
f) Formules de Taylor globales	
Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	