Matrices et applications linéaires

Questions de cours

Théorème 1 *Supplémentaires et équations d'un hyperplan - À énoncer et démontrer un point*

- Soit f une forme linéaire **non nulle** sur E. Pour tout $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$, on a :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(u)$$

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si, et seulement si elles sont liées.

Proposition 2 *Résultats sur les v.a. à connaitre - À énoncer seulement*

1. Rappeler les lois usuelles (loi, espérance et variance).
2. Rappeler les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
3. Rappeler la formule de transfert.
4. Rappeler le lien entre espérance et indépendance.
5. Rappeler les formules de Kœnig-Huygens (variance et covariance).

Proposition 3 *Inverse - À énoncer et à démontrer*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \text{ est inversible}$$

et lorsque f est bijective, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Théorème 4 *Matrices triangulaires inversibles - À énoncer et à démontrer*

Soit $T \in T_n^+(\mathbb{K})$. La matrice T est inversible si, et seulement si

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \qquad [T]_{i,i} \neq 0$$

De plus, lorsque T est inversible, $T \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Proposition 5 *Formule de changement de bases pour un endomorphisme - À énoncer et à démontrer*

Si f est un endomorphisme de E et (e), (e') sont deux bases de E alors

$$\text{Mat}_{(e')}(f) = P_{(e'),(e)} \, \text{Mat}_{(e)}(f) \, P_{(e),(e')}$$

Proposition 6 *Trace d'un projecteur - À énoncer et à démontrer*

Si p est un projecteur alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Théorème 7 *Caractérisation 1 de matrices équivalentes - À énoncer et démontrer le sens direct*

Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

(i) A et B représentent le même endomorphisme dans des bases éventuellement distinctes,

(ii) il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ telles que $A = P\,B\,Q$.

Proposition 8 *Caractérisation 2 de matrices équivalentes - À énoncer et démontrer le sens direct*

Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

(i) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$,

(ii) il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ telles que $A = P\,B\,Q$.

Théorème 9 *Série harmonique - À énoncer et à démontrer*

(i) La série harmonique diverge.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln n$

Points du programme officiel abordés

Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires.	Cas particulier des endomorphismes.
Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.