Déterminant
& Fonctions de deux variables

Questions de cours

Proposition 1

Définition du déterminant d'un endomorphisme - À énoncer et à démontrer

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ qui ne dépend que de f, tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E on a

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

On l'appelle le déterminant de f, on le note $\det(f)$.

Proposition 2

Développement par rapport à une ligne ou une colonne - À énoncer et à démontrer

(i) $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,(-1)^{i+k}\,\Delta_{i,k}$

(ii) $\forall j \in [\![1;n]\!] \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\,(-1)^{k+j}\,\Delta_{k,j}$

Proposition 3

Déterminant et comatrice - À énoncer et à démontrer

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \qquad A\,\mathrm{Com}(A)^\intercal = \mathrm{Com}(A)^\intercal\,A = \det(A)\,I_n$$

Proposition 4

Calcul de déterminants par blocs - À énoncer et à démontrer

Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des matrices carrées alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$$

Proposition 5

Déterminants de Vandermonde - À énoncer et à démontrer

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

Ce déterminant s'appelle le **déterminant de Vandermonde**, on le note $V(x_1,\dots,x_n)$.

Exemple 6

Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Exemple 7

CCINP 33

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exemple 8

CCINP 52

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. **a.** Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   b. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   a. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
   b. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exemple 9

Soient
$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+xy^2 \quad \text{et} \quad K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x+y\leqslant 1\right\}$$
Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.

Points du programme officiel abordés

Déterminant

Contenus	Capacités & commentaires
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.	
La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles.	
L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice. Relation $A\ \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top\ A = \det(A)I_n$.	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Fonctions de deux variables

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts.	
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$: $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\\|(h,k)\\|).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0, y_0)$. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$.
Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$	Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f \circ \gamma)'(t) = \big\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	
d) Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.	
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques.