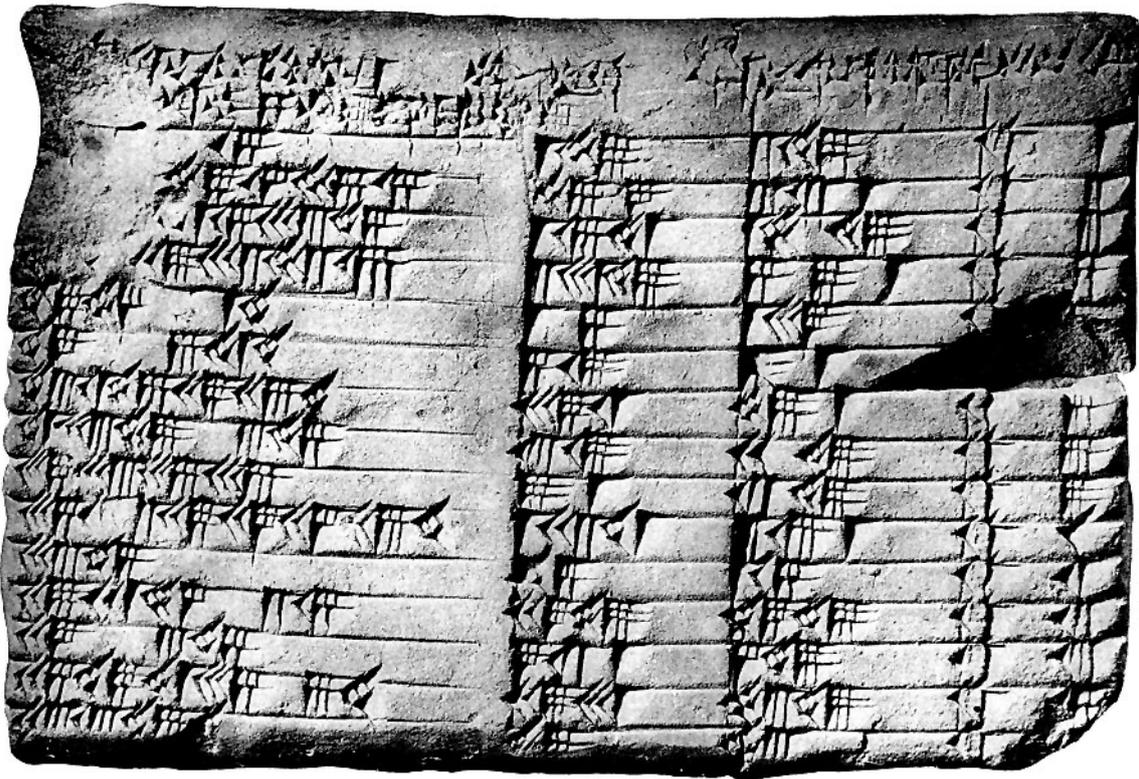


Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions



Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX,
Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY,
Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET,
Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI,
Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 1.2.2 — 25 août 2024

Sommaire

<input type="checkbox"/>	1. Fractions.....	1
<input type="checkbox"/>	2. Puissances.....	3
<input type="checkbox"/>	3. Calcul littéral.....	4
<input type="checkbox"/>	4. Racines carrées.....	6
<input type="checkbox"/>	5. Expressions algébriques.....	8
<input type="checkbox"/>	6. Équations du second degré.....	10
<input type="checkbox"/>	7. Exponentielle et logarithme.....	13
<input type="checkbox"/>	8. Trigonométrie.....	16
<input type="checkbox"/>	9. Dérivation.....	18
<input type="checkbox"/>	10. Primitives.....	21
<input type="checkbox"/>	11. Calcul d'intégrales.....	24
<input type="checkbox"/>	12. Intégration par parties.....	26
<input type="checkbox"/>	13. Changements de variable.....	28
<input type="checkbox"/>	14. Intégration des fractions rationnelles.....	30
<input type="checkbox"/>	15. Systèmes linéaires.....	33
<input type="checkbox"/>	16. Nombres complexes.....	35
<input type="checkbox"/>	17. Trigonométrie et nombres complexes.....	36
<input type="checkbox"/>	18. Sommes et produits.....	38
<input type="checkbox"/>	19. Coefficients binomiaux.....	41
<input type="checkbox"/>	20. Manipulation des fonctions usuelles.....	43
<input type="checkbox"/>	21. Suites numériques.....	46
<input type="checkbox"/>	22. Développements limités.....	48
<input type="checkbox"/>	23. Arithmétique.....	50
<input type="checkbox"/>	24. Polynômes.....	52
<input type="checkbox"/>	25. Décomposition en éléments simples.....	54
<input type="checkbox"/>	26. Calcul matriciel.....	57
<input type="checkbox"/>	27. Algèbre linéaire.....	61
<input type="checkbox"/>	28. Équations différentielles.....	64
<input type="checkbox"/>	29. Séries numériques.....	66
<input type="checkbox"/>	30. Structures euclidiennes.....	68
<input type="checkbox"/>	31. Groupes symétriques.....	70
<input type="checkbox"/>	32. Déterminants.....	72
<input type="checkbox"/>	33. Fonctions de deux variables.....	74

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (🕒🕒🕒), deux (🕒🕒🕒), trois (🕒🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse cahierdecacul@gmail.com. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel).

- a) $\frac{32}{40}$ c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$
- b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$ d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$ c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$
- b) $\frac{2}{3} - 0,2$ d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$
- b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$
- c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$
- d) $\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

- a) $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$
- b) $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

- a) $\frac{29}{6}$
- b) $\frac{k}{k-1}$...
- c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$
- b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$
- c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux? Oui ou non?

Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ c) $\frac{10^5}{10^3}$ e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$

b) $(10^5)^3$ d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ e) $\frac{6^5}{2^5}$

b) $(5^3)^{-2}$ d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

b) $2^{21} + 2^{22}$ d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$

b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Prérequis
 Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$ | <input type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2$ | <input type="text"/> |

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés**Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.8On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a + 2)^3$

c) a^{12}

b) $a^5 - a^6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

a) $(3 + i)^2$

c) $(3 - i)^3$

b) $(3 - i)^2$

d) $(3 - 2i)^3$

Calcul 5.3



Même exercice.

a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$

c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$

b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$

d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$

c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$

f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.



Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

- a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

- a) $x^2 + y^2 + z^2$
- b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$
- c) $x^3 + y^3 + z^3$
- d) $(x + y)(y + z)(z + x)$
- e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$
- f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$

Calcul 5.7



Même exercice.

- a) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$
- b) $x^4 + y^4 + z^4$
- c) $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$
- d) $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$
- e) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

g) $2x^2 + 3 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

e) $x^2 - 5x = 0$

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine

Calcul 6.4 — Racine évidente.



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$
- b) $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$
- c) $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$
- d) $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$
- f) $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.



Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$
- b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$
- c) $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ | <input type="text"/> |

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$ | <input type="text"/> |
| b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | <input type="text"/> |
| c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ | <input type="text"/> |
| d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. | <input type="text"/> |
| b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ | <input type="text"/> |
| c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ | <input type="text"/> |
| d) Déterminer la limite de f en $-\infty$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1



Simplifier :

a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$.

c) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 8.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 8.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 8.5



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$

b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 8.6



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 8.7



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$

h) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x \geq 1$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

f) $|\tan x| \geq 1$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$

c) $\frac{3}{(t+2)^3}$

b) $\frac{3}{(t+2)^2}$

d) $\sin(4t)$

Calcul 10.2



Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$

b) e^{2t+1}

d) $\frac{1}{1+9t^2}$

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$

d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$

b) $t\sqrt{1+2t^2}$

e) $\frac{t}{1+3t^2}$

c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – bis.



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$

d) $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$

b) $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$

e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$

c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$

f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

Calcul 10.5 — Trigonométrie.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\cos^2 t \sin t$ <input type="text"/> | g) $\tan^2 t$ <input type="text"/> | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ <input type="text"/> | h) $\tan^3 t$ <input type="text"/> | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\tan t$ <input type="text"/> | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ <input type="text"/> | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ <input type="text"/> | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ <input type="text"/> | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ <input type="text"/> |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ <input type="text"/> | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}\text{Arcsin}(t)}$ <input type="text"/> |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\cos^2 t$ <input type="text"/> | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ <input type="text"/> | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ <input type="text"/> |
| c) $\sin^3 t$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ <input type="text"/> | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ <input type="text"/> | |

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- | | |
|---|--|
| a) $t^2 - 2t + 5$ <input type="text"/> | e) $e^{2t} + e^{-3t}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ <input type="text"/> | f) e^{3t-2} <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |

i) $\sin(t) \cos^2(t) \dots$

j) $\sinh(t) \cosh(t) \dots$

k) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots$

l) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots$

m) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots$

n) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots$

o) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots$

p) $te^{-t^2} \dots$

q) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots$

r) $\frac{1}{t \ln t} \dots$

s) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots$

t) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots$

Calcul 10.9 — *Bis repetita.*



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$. b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$ c) $\int_0^{-1} \sin x dx$...

Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$ c) $\int_0^7 3x dx$ e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$
 b) $\int_7^{-3} -5 dx$ d) $\int_2^8 1 - 2x dx$.. f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $\left[F(x) \right]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$ d) $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$
 b) $\int_1^3 2x - 5 dx$ e) $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$
 c) $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$ f) $\int_1^{-1} x^{100} dx$

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$... c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ e) $\int_{-3}^2 e^x dx$
 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$... d) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$... f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax + b)$.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$

b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$

e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$

f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$

Calcul 11.6 — Fonctions composées.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$

e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$

Calcul 11.7 — Divers.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

d) $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$

b) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$

c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.



a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x dx$

d) $\int_0^1 \operatorname{ch}(x) dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^2 10^x dx$

f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 12.1



Calculer :

- | | |
|--|--|
| a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | h) $\int_0^1 t \arctan t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\int_0^2 te^{\frac{t}{2}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $\int_1^{\ln 2} t2^t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | j) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $\int_1^e \ln t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $\int_1^2 t \ln t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |

Primitives

Calcul 12.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto (-x+1)e^x$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | d) $x \mapsto x \text{ch}(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x) \dots\dots$

c) $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots\dots$

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \sin \theta$
- b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$
- c) $\int_0^1 \frac{1}{\text{cht}} dt$ avec $u = e^t$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$ avec $u = \sin t$
- e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ avec $u = \sin t$
- f) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calcul 13.2



Même exercice.

- a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ avec $u = \cos t$
- b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$ avec $u = e^t$
- c) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$ avec $u = \frac{t}{2} - 1$
- d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ avec $t = \tan u$
- e) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ avec $u = \frac{1}{t}$
- f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$ avec $u = \ln t$

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

b) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4



Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$

b) $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \operatorname{th}(x)}$ avec $u = e^x$

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$

d) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$

e) $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.

Petites décompositions en éléments simples.

Forme canonique d'un trinôme du second degré.

Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 14.1



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$

b) $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt$

Calcul 14.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt$

b) $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt$

Deuxième cas

Calcul 14.3



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt$

Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 14.4



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt$

Calcul 14.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt$

b) $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt$

Quatrième cas

Calcul 14.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de $t \mapsto t^2 - 3t + 2$?

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$

c) Calculer $\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt$

Calcul 14.7



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$

b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt$

Calcul 14.8



Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt$

Cinquième cas

Calcul 14.9 — Une primitive à retenir.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$

Calcul 14.10



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt$

Calcul 14.11



Calculer $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt$

Synthèse

Calcul 14.12 — Mise sous forme canonique.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $x^2 + x + 1$ | <input type="text"/> | c) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ | <input type="text"/> |
| b) $2x^2 - 3x + 1$ | <input type="text"/> | d) $ax^2 + a^2x + a^3$ | <input type="text"/> |

Calcul 14.13



Calculer les intégrales suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt$ | <input type="text"/> | c) $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$ | <input type="text"/> | d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt$ | <input type="text"/> |

Calcul 14.14



Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}} dt$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt$ | <input type="text"/> |

Un calcul plus difficile

Calcul 14.15



Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$

Systèmes linéaires

Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 15.1



Résoudre dans \mathbb{R}^2 .

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$

Calcul 15.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans \mathbb{R}^2 en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 15.3



Résoudre dans \mathbb{R}^3 .

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 15.4



Résoudre dans \mathbb{R}^3 .

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$

Calcul 15.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

- a) $a = 0$ c) $a = 3$
- b) $a = -2$ d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

Calcul 15.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

- a) $a = 2, c = 7$ c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) $a = 1, c = 2$

Calcul 15.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

- a) $\lambda = 1$ c) $\lambda = 6$
- b) $\lambda = 3$

Nombres complexes

Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 16.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 16.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) 12 | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ | <input type="text"/> |
| b) -8 | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ | <input type="text"/> |

Un calcul plus dur

Calcul 16.3 — Une simplification.



On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Calculer $ z $ | <input type="text"/> |
| b) Mettre z sous forme algébrique | <input type="text"/> |
| c) Calculer z^{2021} | <input type="text"/> |

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis

Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 17.1



Linéariser :

a) $\cos^3(x)$

d) $\cos(3x) \sin^3(2x)$...

b) $\cos(2x) \sin^2(x)$

e) $\cos^3(2x) \cos(3x)$..

c) $\cos^2(2x) \sin^2(x)$...

f) $\sin^2(4x) \sin(3x)$...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 17.2



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$

g) $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$

h) $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27}$

Calcul 17.3



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

Délinéarisations

Calcul 17.4



Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$

b) $\sin(4x)$

Factorisations

Calcul 17.5



Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x) \dots\dots$

c) $\cos(x) - \cos(3x) \dots\dots$

b) $\sin(5x) - \sin(3x) \dots\dots$

d) $\sin(3x) + \sin(5x) \dots\dots$

Calcul 17.6



Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) \dots\dots\dots$

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) \dots\dots\dots$

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$

Calculs d'intégrales

Calcul 17.7



Calculer :

a) $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x) dx \dots\dots\dots$

Sommets et produits

Pré requis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k+n-1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right)$

Calcul 18.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2))$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 18.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

c) $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

d) $\prod_{k=-10}^{10} k$

Avec des changements d'indice

Calcul 18.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$
- c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$
- d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$

Sommes et produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$
- b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- d) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$
- b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3}$
- c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 18.7



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sommation par paquets

Calcul 18.8



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

Sommes doubles

Calcul 18.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$

e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$

f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$

d) $\binom{6}{2}$

b) $\frac{10!}{7!}$

e) $\binom{8}{3}$

c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

f) $4 \times \binom{7}{4}$

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer — bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$

c) $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$

b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$

d) $3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)

d) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)

e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 19.4 — Avec des paramètres — bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$

b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$
- c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$
- b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$
- d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6



- a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$
- b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

Calcul 19.7



En utilisant la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$
- b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$
- d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$

Calcul 19.8



- a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n}$
- b) En donner une autre expression en développant le produit $(1 + x)^n(1 + x)^n$
- c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

e) $\arctan(1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

Calcul 20.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$

d) $\text{sh}(\ln(3))$

b) $\text{sh}(0)$

e) $\text{ch}(\ln(2/3))$

c) $\text{ch}(\ln(2))$

f) $\text{th}(\ln(2))$

Calcul 20.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$

b) $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$

Résolution d'équations

Calcul 20.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$

c) $2^x = 3 \times 4^x$

b) $4^x = 2 \times 2^x$

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$...

Calcul 20.5 — Fonctions $x \mapsto a^x$ (plus difficile).



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

- a) $2^x + 4^x = 4$
- b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$
- c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$
- d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$

Calcul 20.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

- a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- b) $\cos(\arccos(x)) = 0$
- c) $\arccos(\cos(x)) = 0$
- d) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$
- e) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$
- f) $\tan(\arctan(x)) = 1$

Calcul 20.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$
- b) $\text{sh}(x) = 1$
- c) $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$
- d) $\text{ch}(x) \leq 4$
- e) $\text{sh}(x) \geq 3$
- f) $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$

Dérivation

Calcul 20.8 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto 2^x + x^2$
- b) $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$
- c) $x \mapsto x^x$
- d) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$

Calcul 20.9 — Quelques calculs de dérivées — bis.



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x^2) \dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x)) \dots$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x) \dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x)) \dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 20.10 — Deux dérivées importantes.



- | | |
|---|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 20.11 — Des dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $x \mapsto F(x^x) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| d) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0

c) u_{n+1}

b) u_1

d) u_{3n}

Calcul 21.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme

b) u_3

Calcul 21.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3

b) son sixième terme

Calcul 21.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2

b) son centième terme

Calcul 21.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n}

b) t_{4n}

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10}

c) $a_{1\ 000}$

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$

Calcul 21.7 — Suite arithmétique.



La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \frac{2}{3}$ et $b_{103} = \frac{3}{4}$. Calculer :

- a) b_{102} b) r

Calcul 21.8 — Suite géométrique.



La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. Calculer :

- a) Son dixième terme est : c) g_{10}
b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$ d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$

Calcul 21.9 — Suite géométrique.



La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$. Calculer :

- a) h_{12} b) q

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10



Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

- a) u_n b) u_5

Calcul 21.11



Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

- a) v_n b) v_2

Calcul 21.12 — Suite de Fermat.



Soit la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

- a) F_3 d) $F_n \times (F_n - 2)$
b) F_4 e) F_n^2
c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$

Développements limités

Prérequis

Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young.

Avertissement : Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits $o(\cdot)$) ou « au sens fort » (avec les grands $O(\cdot)$). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

Développements limités

Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions. ⓪⓪⓪⓪

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

- a) À l'ordre 4 : $\sin(x) + 2\ln(1+x)$
- b) À l'ordre 4 : $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$
- c) À l'ordre 6 : $\sin(x)(\cosh(x) - 1)$
- d) À l'ordre 6 : $e^x \sin(x)$

Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée. ⓪⓪⓪⓪

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

- a) À l'ordre 4, en 0 : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
- b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$
- c) À l'ordre 3, en 0 : $e^{e^{ix}}$
- d) À l'ordre 2, en 1 : $\frac{\ln(2-x)}{x^2}$

Calcul 22.3 — Développements limités d'une fonction composée. ⓪⓪⓪⓪

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

- a) À l'ordre 2, en $\frac{\pi}{3}$: $\sin(\pi \cos(x))$
- b) À l'ordre 3, en $\frac{\pi}{4}$: $\tan(x)$
- c) À l'ordre 7, en $\frac{\pi}{2}$: $\cos(\pi \sin(x))$

Développements asymptotiques

Calcul 22.4



Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À la précision x^2 , en 0 : $\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$

b) À la précision $\frac{1}{x^5}$, en $+\infty$: $\frac{\sin(1/x)}{x+1}$

c) À la précision $\frac{1}{x^3}$, en $+\infty$: $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$

d) À la précision $\frac{e^x}{x^2}$, en $+\infty$: $\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$

Arithmétique

Prérequis

Division euclidienne. Algorithme d'Euclide. Théorèmes de Gauss, de Bezout et de Fermat. Décomposition en facteurs premiers.

Division euclidienne

Calcul 23.1 — Variations sur le signe.



Effectuer la division euclidienne de a par b , on donnera le résultat sous la forme « (quotient, reste) ».

a) $a = 61$ et $b = 9$

c) $a = 61$ et $b = -9$

b) $a = -61$ et $b = 9$

d) $a = -61$ et $b = -9$

Calcul 23.2 — Diviseur et reste inconnus.



On divise 524 par un entier non nul inconnu, d . Le quotient vaut 26 et le reste r .

a) d vaut

b) r vaut

Calcul 23.3 — Arithmétique modulaire.



On rappelle que deux entiers a et b sont congrus modulo n , ce qu'on note $a \equiv b \pmod{n}$, si et seulement s'ils ont même reste de division euclidienne par n .

a) Le reste de 5^{2021} par 3 vaut

b) Le reste de 3^{2022} par 5 vaut

Calcul 23.4 — Encore des modulus.



La notation a^{b^c} désigne le nombre a à la puissance « b puissance c ». À ne pas confondre avec $(a^b)^c = a^{b \times c}$

Le chiffre des unités de $2\ 023^{2022^{2021}}$ est

PGCD et PPCM

Calcul 23.5 — Réduction de fractions.



On notera $a \wedge b$ le plus grand diviseur commun de a et b et $a \vee b$ leur plus petit multiple commun.

a) $10\ 010 \wedge 2\ 772$ vaut

c) $729 \vee 360$ vaut

b) la forme irréductible de $\frac{10\ 010}{2\ 772}$ est

d) $\frac{1}{360} - \frac{2}{729}$

Calcul 23.6 — Systèmes diophantiens.



Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

a) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 9792 \\ a \wedge b = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a \times b = 360 \\ a \vee b = 60 \\ 6 < a < b \end{cases}$

Coprimauté, relation de Bezout et théorème de Gauss

Calcul 23.7 — Inverse modulo 13.



L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation de congruence $5x+4 \equiv 7 \pmod{13}$. Pour ce faire, on cherche un inverse pour 5 modulo 13, c'est-à-dire un reste noté $\text{inv}_{13}(5)$ tel que $5 \times \text{inv}_{13}(5) \equiv 1 \pmod{13}$.

- a) Donner une solution dans \mathbb{Z}^2 de l'équation diophantienne $5u + 13v = 1$
- b) Déterminer l'inverse de 5 modulo 13.
- c) Résoudre l'équation $5x + 4 \equiv 7 \pmod{13}$ dans \mathbb{Z}

Calcul 23.8 — Équation diophantienne.



Soit N le nombre de couples d'entiers (x, y) solution de l'équation $(E) : 19x - 6y = 1$ et vérifiant $1999 \leq x \leq 2023$ et (x_0, y_0) celle de ces solutions qui maximise y .

- a) N vaut b) (x_0, y_0) vaut

Décomposition en facteurs premiers et théorème de Fermat

Calcul 23.9 — Décomposer pour décomposer.



Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers suivants. Il s'agit ici d'appliquer au maximum les critères élémentaires de divisibilité (par 2, 3, 4, 5 et 9).

- a) 2 022 c) 2 021
- b) 2 023 d) 2 027

Calcul 23.10 — Diviseur et quotient inconnus.



On divise 477 par un entier non nul inconnu, n . Le quotient est q et le reste vaut 8.

- a) n vaut b) q vaut

Calcul 23.11 — Arithmétique modulaire.



Déterminer, dans chaque cas, le reste de chaque puissance modulo l'entier proposé.

- a) $3^{24} = 3^{4 \times 6} \pmod{35}$ d) $5^{61} \pmod{77}$
- b) $3^{72} \pmod{35}$ e) $77^{122} \pmod{143}$
- c) $6^{75} \pmod{35}$ f) $385^{3456} \pmod{4195}$

Polynômes

Prérequis

Opérations sur les polynômes. Division euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X - 1$

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1$, $B = X^2 + X + 1$

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$, $B = X^3 + X^2 + 2$

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$, $B = 2X^3 - X^2 - X + 1$

Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.



La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$

c) $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$, $B = (X - 2)^2$

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$

Calcul 24.3 — Avec des opérations.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X - 2)^2$

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$

Calcul 24.4 — Pour évaluer en un point.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$

b) Calculer $P(i)$

Calcul 24.5 — Pour évaluer en un point — bis.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$

b) Calculer $P(\sqrt{2})$

Calcul 24.6 — Pour évaluer en un point — ter.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$

b) $P(i + 1)$

Calcul 24.7 — Pour factoriser.



Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes ci-dessous, connaissant certaines racines :

a) $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ où 1 est racine multiple.

b) $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$ où $1 + i$ est racine.

c) $P = X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ où 1 est racine multiple et i est racine.

Décomposition en éléments simples

Prérequis

Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X^4 - 2}{X(X + 1)(X + 2)}$

b) $\frac{X^3 + 2}{(X - 1)X(X + 1)}$

c) $\frac{X^2}{(X - \pi)(X + \pi)}$

Calcul 25.2



Même exercice.

a) $\frac{X + 1}{(X + 2)(X + e)}$

b) $\frac{X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)(X - 1)}$

c) $\frac{X^2 + 2}{(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3})}$

Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)(X - 3)}$

b) $\frac{2 + X^2}{(X + 1)X^2(X - 1)^2}$

c) $\frac{1 - X}{X(X + \pi)^2}$

d) $\frac{1}{(X - i)^2(X - 1 - i)^2}$

Calcul 25.4 — À vous de factoriser.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X-3}{X^4-1}$

b) $\frac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$

Calcul 25.5 — Calculs de sommes.



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

b) $\sum_{k=2}^n \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$

Calcul 25.6 — Calculs de sommes.



Effectuer la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$

b) $\frac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 25.7 — Pôles simples ou multiples.



Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} dx$

d) $\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx$

e) $\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx$

f) $\int_2^3 \frac{x}{x^4-1} dx$

Calcul 25.8 — Primitives.



Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $x \mapsto \frac{1}{(1 - 2x)^3}$

c) $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$

d) $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$

e) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 2x + 3}$

f) $x \mapsto \frac{x^4}{(x - 1)(x - 2)(x + 1)}$

g) $x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 2)(x + 1)}$

h) $x \mapsto \frac{x - 2}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$

Calcul matriciel

Prérequis

Calculs algébriques (sommés), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 7 \quad -2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) $A^2 \dots$

d) $E \times B$

g) $D^2 \dots$

b) $A^3 \dots$

e) $A \times E$

h) $D \times C$

c) $B \times E$

f) $B \times A$

i) $B^T \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \quad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole \sum .

On rappelle que $\binom{i}{j} = 0$ quand $j > i$.

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^T \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $A \times C \dots\dots\dots$

Calcul 26.4 — Deux calculs plus difficiles.



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $[A^2]_{i,j}$ b) $[C^2]_{i,j}$

Inversion de matrices

Calcul 26.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...	<input type="text"/>	d) D ...	<input type="text"/>	g) G ...	<input type="text"/>
b) B ...	<input type="text"/>	e) E ...	<input type="text"/>	h) H ..	<input type="text"/>
c) C ...	<input type="text"/>	f) F ...	<input type="text"/>	i) J ...	<input type="text"/>

Calcul 26.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.



Soit λ un paramètre réel. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A
inversible ...

c) CNS pour B
inversible ...

b) Inverse de A ...

d) Inverse de B ...

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

Vecteurs

Calcul 27.1



Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base \mathcal{B} .

a) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$

b) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$

c) $u = (3, 4)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$

d) $u = (1, 2, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$

e) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$

g) $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$

Calculs de rangs

Calcul 27.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calcul 27.3



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices et applications linéaires

Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.



Pour les applications linéaires f et les bases \mathcal{B} suivantes, déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1)).$

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0)).$

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y), \mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y), \mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$

e) $f : P \mapsto P(X + 2), \mathcal{B} = (1, X, X^2)$

Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.



Pour les applications linéaires f et les bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' suivantes, déterminer la matrice de f de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' .

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$, $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$

Équations différentielles

Prérequis

Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 28.1



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$

Calcul 28.2



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = e$

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$

d) $y' = \pi y + 2e$ et $y(\pi) = 12$

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 28.3 — Une équation avec conditions initiales.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3i$

Calcul 28.4 — Racines doubles, racines simples.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$

Calcul 28.5 — Racines complexes.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = i$ et $y'(0) = -i$

Séries numériques

Prérequis

Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 29.1 — Séries géométriques.



a) $\sum_{k \geq 0} 2^k$

c) $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$

b) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$

d) $\sum_{k \geq 10} \frac{1}{3^k}$

Calcul 29.2 — Séries exponentielles.



a) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$

c) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k \times k!}$

b) $\sum_{k \geq 2} \frac{2^k}{k!}$

Calcul 29.3 — Séries de Riemann.



a) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$

b) $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$

c) $\sum_{k \geq 6} \frac{1}{k}$

Calcul 29.4 — Séries géométriques – bis.



a) $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k}}$

c) $\sum_{k \geq 3} \frac{i^k}{7^{k-1}}$

b) $\sum_{k \geq 1} e^{-(k-1)}$

d) $\sum_{k \geq 4} \frac{1}{(1 - i\sqrt{2})^k}$

Séries télescopiques

Calcul 29.5



Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 + k}$

c) $\sum_{k \geq 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right)$

b) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$

d) $\sum_{k \geq 0} \arctan\left(\frac{(k+2) - (k+1)}{1 + (k+2)(k+1)}\right)$

Séries géométriques dérivées

Prérequis

On pourra utiliser le fait que si $\alpha \in]-1, 1[$, les séries

$$\sum_{k \geq 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3}.$$

Calcul 29.6 — Séries géométriques dérivées.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\sum_{k \geq 1} k2^k$

b) $\sum_{k \geq 0} k \frac{1}{2^{k-1}}$

Calcul 29.7 — Séries géométriques dérivées – bis.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\sum_{k \geq 1} k2^{-k}$

b) $\sum_{k \geq 1} (3k+1) \frac{1}{3^k}$

c) $\sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}}$

d) $\sum_{k \geq 2} k(k-1)e^{-(k-2)}$

Structures euclidiennes

Prérequis

Produit scalaire, famille orthogonale, base orthonormée.

Calcul de produits scalaires

Calcul 30.1 — Des calculs de produits scalaires de fonctions.



Calculer les produits scalaires entre les vecteurs suivants dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les éléments de E suivants :

$$f_1 : t \mapsto \ln(1+t), \quad f_2 : t \mapsto t^2, \quad f_3 : t \mapsto \cos t, \\ f_4 : t \mapsto e^t, \quad f_5 : t \mapsto 1+t, \quad f_6 : t \mapsto 2.$$

- | | |
|---|---|
| a) $\langle f_1, f_6 \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> | c) $\langle f_3, f_5 \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $\langle f_2, f_5 \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> | d) $\langle f_4, f_4 \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 30.2 — Des calculs de produits scalaires de matrices.



Calculer les produits scalaires suivants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

On notera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- | | |
|---|---|
| a) $\langle A, B \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> | c) $\langle B, C \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $\langle B, B \rangle$ <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> | |

Distances euclidiennes

Calcul 30.3 — Des calculs de distances.



On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

- | | |
|--|---|
| a) Calculer la distance de X^2 à $\text{Vect}(1, X)$ | <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) Calculer la distance de X à $\text{Vect}(1, X^3)$ | <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) Calculer la distance de $1 + X^2$ à $\text{Vect}(X, X^2)$ | <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> |

Orthonormalisation

Calcul 30.4 — Orthonormalisation de Gram-Schmidt.



On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dx$.

En appliquant le processus de Gram-Schmidt :

a) calculer une base orthonormale de $\text{Vect}(1, X)$

b) calculer une base orthonormale de $\text{Vect}(X, X^2 + 1)$

Matrices de projections orthogonales et de symétries orthogonales

Calcul 30.5 — Calculs de matrices.



On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, qu'on munit d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

On note x, y et z les coordonnées dans cette base.

Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire sa matrice dans la base \mathcal{B} .

a) La projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$

b) La projection orthogonale sur la droite D dirigée par $i + 2k$

c) La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 3y - z = 0$

Groupes symétriques

Prérequis

Permutations, cycles, transpositions, décomposition en produit de cycles à supports disjoints, signature.

Opérations sur les permutations

Calcul 31.1 — Échauffement.



On considère les permutations suivantes de \mathfrak{S}_6

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les permutations suivantes.

a) ρ^{-1}

d) $\rho\sigma$

b) σ^{-1}

e) $\sigma\rho$

c) σ^2

f) $\sigma\rho\sigma^{-1}$

Calcul 31.2 — Opérations sur les cycles.



Calculer les puissances suivantes, où a , b et c désignent trois entiers naturels non nuls distincts.

a) $(a b)^{-1}$

d) $(a b c)^2$

b) $(a b c)^{-1}$

e) $(2 4 5 1)^3$

c) $(1 3 5 2 7)^{-1}$

f) $(1 5 2 3 7)^{42}$

Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Calcul 31.3



Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

c) $(1 3 5 2)(2 4 1 7)(5 8)$

d) $(1 3)(3 2 1 4)(3 1 4)(2 1 4)$

e) $(2 6)(4 2 1 5)(3 2)(3 1 5)$

Calcul 31.4 — Application aux calculs de puissance.



Expliciter les puissances suivantes sous la forme d'un produit de cycles à supports disjoints.

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{47}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{168}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{168}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{227}$

Calculs de signature

Calcul 31.5 — Calculs de signature – niveau 1.



Déterminer la signature des permutations suivantes.

- a) $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$
- b) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$
- c) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}$
- d) $(1\ 3\ 2\ 4)^{37}$
- e) $(1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)$
- f) $((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}$

Calcul 31.6 — Calculs de signature – niveau 2.



Déterminer la signature des permutations suivantes.

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 9 & 10 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 6 & 10 & 5 & 9 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminants

Prérequis

Nombres complexes.

Calculs en dimension deux

Calcul 32.1



Soit a un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 5i \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Calcul 32.2



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 - \sqrt{32} \\ 2 + \sqrt{8} & 3 - \sqrt{8} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$

Calculs en dimension trois

Calcul 32.3



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $j^3 = 1$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}$

Calcul 32.4

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} j & -j & j \\ -j & j & j \\ j & j & -j \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -2+i \\ -i & 2i-1 & 1-2i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

Calcul 32.5Soit x , y et z des nombres réels et a un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$

Fonctions de deux variables

Prérequis

Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

Les fondamentaux

Calcul 33.1 — Ensembles de définition.



Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

- a) $(x, y) \mapsto \arcsin |x - y|$
- b) $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$
- c) $(x, y) \mapsto \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$
- d) $(x, y) \mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 16)$

Calcul 33.2 — Dérivation partielle.



Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

- a) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$
- b) $f : (x, y) \mapsto \sin(2xy - y)$
- c) $f : (x, y) \mapsto (x^2y, x^2 - y^2)$
- d) $f : (x, y) \mapsto \arctan(2x + y)$

Calcul 33.3



Même exercice.

- a) $f : (x, y) \mapsto \cos(x - y)$
- b) $f : (x, y) \mapsto x \cos(e^{xy})$
- c) $f : (x, y) \mapsto x^y$
- d) $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Composition de fonctions

Calcul 33.4 — Règle de la chaîne.



On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = e^{2t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$

c) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3 \sin(2t) \\ v(t) = 4 \cos(2t) \end{cases}$

Calcul 33.5 — Changements de variables.



Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.

Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$

b) $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$