Vous êtes selectionné-e pour préparer les concours des grandes écoles d'ingénieurs au Lycée International de Valbonne, félicitations !

Le document qui suit vous permet d'aborder cette préparation difficile dans les meilleures conditions. Il est composé de trois parties :

$\boxed{\text{Partie I}}$: Un programme de calculs élémentaires à étaler sur les deux mois de vacances suivant un calendrier découpé par semaines. Vous y trouverez les bases à savoir mener parfaitement dès la rentrée et qui seront indispensables tout au long de l'année. Sans leur maîtrise, vous ne parviendrez pas à entrer dans le cœur du cours (plus théorique !). Si certains exercices vous paraissent très simples, tant mieux ! L'idéal est qu'ils le soient tous à la rentrée !

ATTENTION : à la première séance, vous aurez un contrôle comprenant quelques questions choisies dans chacune des semaines de ce programme.

$\boxed{\text{Partie II}}$: Les corrigés des exercices proposés en Partie I.

$\boxed{\text{Partie III}}$: Un **DEVOIR POUR LE JOUR DE LA RENTRÉE**, correctement rédigé avec résultats soulignés ou encadrés, qui doit vous permettre de réviser vos connaissances de terminale. Il n'y a pas de retard possible pour la remise de ces dm, obligatoires tout au long de l'année.

Si vous avez des difficultés ou des questions, vous pouvez me contacter à l'adresse suivante :

aufrancm@gmail.com

Bonne préparation et bonnes vacances !

Partie I : le programme hebdomadaire et ses exercices

Semaine 1 du 1er au 7 Juillet : trigonométrie

Le formulaire suivant est à connaître par cœur et donc à réviser les semaines suivantes :

Pour x, a, b, etc. réels :

on note : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \text{ en changeant } b \text{ en } -b : \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \text{ en changeant } b \text{ en } -b : \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$$\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{cases}$$

$\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

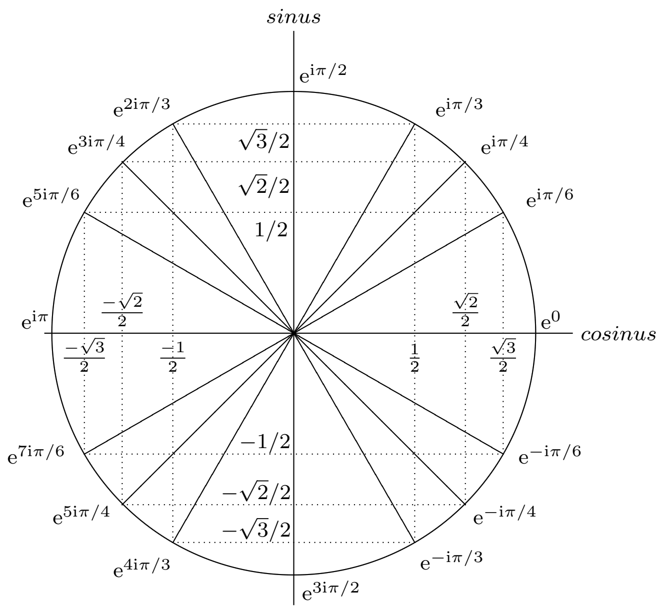
$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(a) \quad \text{a pour solutions :} \quad x = \pm a + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \\ \sin(x) = \sin(a) \quad \text{a pour solutions :} \quad x = a + 2k\pi \text{ et } x = \pi - a + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ANGLES SIMPLES

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(t)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(t)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Suite des $\cos(t)$ *:* $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$

Suite des $\sin(t)$ *: en sens inverse*



Ex1 *Période et antipériode.* Simplifier :

$A = \sin(x + 3\pi)$ $\quad B = \cos(8\pi - x)$ $\quad C = \sin(\frac{9\pi}{4})$ $\quad D = \cos(-\frac{7\pi}{6})$

Plus difficile, pour $n \in \mathbb{N}$: $\quad E = \sin(x + n\pi)$ $\quad F = \cos(x + n\pi)$

Ex2 Simplifier : $A = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$ $\quad B = \sin(\frac{7\pi}{2} - x)$ $\quad C = \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$ $\quad D = \sin(x - \frac{3\pi}{2})$

Ex3 Calculer : $A = \cos(\frac{\pi}{12})$ en vérifiant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$B = \cos(\frac{5\pi}{12})$ en utilisant que $\frac{5\pi}{6} = 2.\frac{5\pi}{12}$

$C = \sin(\frac{\pi}{8})$ en utilisant que $\frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{8}$ $\qquad D = \cos(\frac{3\pi}{8})$

Ex4 *Linéariser, c'est transformer les produits de cosinus/sinus en sommes de cosinus/sinus.* Linéariser :

$A = \cos(2x)\sin(x)$ $\quad B = \sin^2(2x)\cos(x)$ $\quad C = \cos^3(x)$ $\quad D = \sin^3(x)$

Ex5 *Délinéariser, c'est l'opération inverse.* Délinéariser :

$A = \cos(3x)$ (à écrire comme somme de puissances de $\cos(x)$)

$B = \sin(3x)$ (à écrire comme somme de puissances de $\sin(x)$)

$C = \cos(x) + \cos(2x)$ $\qquad D = \sin(2x) - \sin(x)$

Ex6 Résoudre les équations d'inconnue x :

1) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ $\quad$ 2) $2\cos^2(x) = 1$ $\quad$ 3) $\cos(2x) = 0$ $\quad$ 4) $4\sin^2(3x) = 3$

Plus difficile : $\quad$ 5) $\sin(2x) = \cos(3x)$ $\quad$ 6) $\cos(x) = \cos(2x)$

Semaine 2 du 8 au 14 Juillet : calcul littéral

• **Développer** une expression, c'est transformer un produit en somme.
Factoriser, c'est opérer à l'inverse, c'est-à-dire transformer une somme en produit.
Réduire une expression développée, c'est regrouper suivant les puissances d'une même variable.

• **Distributivités** : pour des réels a, b et c,

$$a(b+c) = (b+c)a = ab + ac \qquad \text{et} \qquad a(b-c) = (b-c)a = ab - ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

• **Identités remarquables** : pour des réels a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ex7 Réduire : $A = (3-x) + (9 - 2x + x^2)$ $\quad B = (2-x)^2 - (x + 2 + x^2)$ $\quad C = 2x^2 - x + 4 - (x-3)^2$

Ex8 Développer : $A = x(3x+5)$ $\quad B = 4(2-6x)$ $\quad C = -2(5-x)$ $\quad D = (2-x)(-x)$

Ex9 Développer et réduire :

$A = (x+5)(3x+2)$ $\quad B = (3x-4)(2-6x)$ $\quad C = (3x^2-2)(-5+x)$ $\quad D = (1-x)(-2x-1)$

Ex10 Développer : $A = (3x+2)^2$ $\quad B = (\frac{x}{2} - 2)^2$ $\quad C = -(-5+x)(5+x)$ $\quad D = -(2+3x)(3x-2)$

Ex11 Factoriser et simplifier en repérant un facteur commun :

$A = x(3x+2) - x(2x+5)$ $\quad B = x(2x+5) - x^2$ $\quad C = (2x+5)(3x+7) - (2x+5)(2x+4)$
$D = (3x-2)(2x+4) - (2x+4)(2x+1)$ $\quad E = (x-3)x^2 - 3x(2x-6)$ $\quad F = (x^2-1)(1-2x) + (x+1)(1-2x)^2$

Ex12 Factoriser : $A = x^2+6x+9$ $\quad B = 4x^2-4x+1$ $\quad C = 64x^2-9$ $\quad D = -2x-1-x^2$ $\quad E = 25x^2+1-10x$

Ex13 (Bilan) Factoriser : $A = (x-3)^2 - 9 + x(x-6)$ $\quad B = (x-5)^2 + 4(x-5) + 4 + 2(x-3)$ $\quad C = x^4 + 1 - 2x^2 - 9$

Développer et réduire :

$D = x^3 - (x-3)(x-2)(1-x)$ $\quad E = (2x-6)(x+2) - (2x+1)^2 + 2x(3+x)$ $\quad F = (x-1)^2 - 2(x-3) + x(x-4)$

$\boxed{\textbf{Semaine 3 du 15 au 21 Juillet : Fractions}}$

• Décomposer un entier naturel en facteurs premiers, c'est l'écrire comme produit de nombres premiers (nombre ayant exactement deux diviseurs, 1 et lui-même). Par exemple, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Ceci permet notamment de simplifier une fraction.

• Pour tous réels a, b et c : $\quad \dfrac{ab}{ac} = \dfrac{b}{c} \qquad \dfrac{a}{1} = a \qquad \dfrac{a}{-1} = -a \qquad \dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \qquad \dfrac{a}{b}\dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}$

$$\frac{ab}{c}\frac{c}{ad} = \frac{b}{d} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a\frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

• Dans un calcul avec sommes de fractions, on simplifie les fractions puis on les réduit au même dénominateur. Celui-ci est un multiple de tous les dénominateurs, au pire leur produit, au mieux le plus petit multiple commun. Ce dernier s'obtient en décomposant chaque dénominateur en produit de nombres premiers : le plus petit multiple commun à 84 et 60 est $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ car $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Ex14 Simplifier : $\quad A = \dfrac{234}{288} \qquad B = \dfrac{(x^2 - x)(4 - 2x)}{x(2 - x)} \qquad C = \dfrac{x^6(1 + x^3)}{x^3 + x^6}$

Ex15 Comparer les fractions suivantes (les relier avec $<$ ou $>$) : 1) $\dfrac{3}{5} \cdots \dfrac{5}{9}$ 2) $\dfrac{12}{11} \cdots \dfrac{10}{12}$ 3) $\dfrac{125}{25} \cdots \dfrac{105}{21}$

Ex16 Simplifier : $A = \dfrac{12}{42}\dfrac{7}{33}\dfrac{15}{21} \quad B = (x^2 - 2x)\dfrac{x + 3}{2 - x}\dfrac{x}{x^3 + 3x^2} \quad C = -\dfrac{2x + 4}{x}\dfrac{x}{-2x + 4}\dfrac{2 - x}{2 + x} \quad D = \dfrac{18}{17}\dfrac{17}{16}\dfrac{16}{15}\dfrac{15}{14}$

Ex17 Simplifier : $\quad A = \dfrac{\frac{2}{5}}{2} \qquad B = \dfrac{\frac{2}{5}}{5} \qquad C = \dfrac{-1}{\frac{-1}{-2}} \qquad D = \dfrac{\frac{x}{5}}{\frac{x}{2}}$

Ex18 Développer et réduire : $\quad A = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4}\right) \qquad B = \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{3}\right) \qquad C = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{5}\right)^2$

Ex19 Factoriser : $\quad A = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{6}{25} \qquad B = \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{8x}{15} + \dfrac{16}{9} \qquad C = \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{25}{49}$

Ex20 Écrire sous forme d'une fraction irréductible : $\quad A = \dfrac{n - 1}{n} \times \dfrac{n - 2}{n - 1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}$

$$B = \frac{n - 2}{n} \times \frac{n - 3}{n - 1} \times \cdots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \qquad\qquad C = \frac{\frac{6(n + 1)}{n(n - 1)(2n - 2)}}{\frac{2n + 2}{n^2(n - 1)^2}}$$

Ex21 Écrire sous forme irréductible : $A = \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{10} \qquad B = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} \qquad C = \dfrac{1}{9} - \dfrac{7}{60} + \dfrac{1}{6} \qquad D = \dfrac{5}{30} - \dfrac{6}{8} + \dfrac{5}{9}$

$$E = \frac{1}{x(2x - 1)(x + 1)} - \frac{1}{2x(3x - 2)(2x + 2)} \qquad F = \frac{5}{x - 1} + \frac{7}{x^2 - 1} \qquad G = \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n} \qquad H = \frac{1}{x^5} - \frac{x^4 + 1}{x^9}$$

Ex22 Simplifier : $\quad A = \dfrac{12}{42} \times \dfrac{7}{33} \times \dfrac{15}{21} \qquad B = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}}{\frac{4}{7}} - \dfrac{3}{6} \qquad C = \dfrac{4 \times \frac{3}{8}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}$

Ex23 Écrire sous forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $\dfrac{b}{c}$ irréductible (les lettres sont des naturels) :

$$A = \frac{29}{6} \qquad B = \frac{1}{2}5 \qquad C = \frac{22}{3}$$

Semaine 4 du 22 au 28 Juillet : Racines carrées et valeurs absolues

• Pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{a}\sqrt{a} = a \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

• Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} = a \text{ si } a \geqslant 0 \\ = -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$

• La **quantité conjuguée** de $a+\sqrt{b}$ est $a-\sqrt{b}$. Elle peut permettre d'éliminer des radicaux en dénominateur.

Par exemple : $\dfrac{3}{2-\sqrt{5}} = \dfrac{3(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -6-3\sqrt{5}$ (on utilise : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

Ex24 Simplifier : $A = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \qquad B = \dfrac{x^3}{x\sqrt{x}} \qquad C = \dfrac{2x^2}{16\sqrt{x}} \qquad D = \dfrac{x+2\sqrt{x^2}}{x}$

Ex25 Écrire $\sqrt{\Delta}$ sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b naturels, b le plus petit possible :

1) $\Delta = 8$ 2) $\Delta = 48$ 3) $\Delta = 84$ 4) $\Delta = 180$

Ex26 Supprimer les valeurs absolues, avec x réel : $A = |5| \quad B = |-32| \quad C = |x^2+1| \quad D = |x+1|$

Ex27 Développer puis simplifier :

$$A = (\sqrt{2}+5\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \quad B = (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 \quad C = (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Ex28 Simplifier : $A = \sqrt{54x^2} \qquad B = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \qquad C = (\sqrt{x+1})^2 - 1$

Ex29 Faire disparaître la racine carrée du dénominateur et simplifier :

$$A = \frac{5}{1+\sqrt{6}} \qquad B = \frac{2}{2-\sqrt{3}} \qquad C = \frac{x}{x-\sqrt{x}}$$

Ex30 Écrire sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\frac{2x}{\sqrt{x}+x} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}.(1+\sqrt{t^2+1})}$$

Semaine 5 du 29 Juillet au 4 Août : Puissances

• Pour tout réel positif x on pose : $x^{1/2} = \sqrt{x}$

• Pour tous rationnels a et b et tous réels x et y, lorsque les expressions ont un sens :

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad x^a.x^b = x^{a+b} \qquad x^a.y^a = (xy)^a \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Ex31 Simplifier pour n naturel : $A = 1^n$ $B = (-1)^{2n+1}$ $C = 2^n - 2^{n-1}$ $D = 3^n + 3^n + 3^n$

Ex32 Mettre sous forme $b.x^a$:

$A = (2^5)^4$ $B = 3^4.3^{-2}$ $C = 3^5.7^5$ $D = 3^6.5^4$ $E = 1/4^3$ $F = \dfrac{4^3}{5^2}$ $G = \dfrac{4^3}{4^{-2}}$ $H = \dfrac{9^{-2}}{3^{-2}}$

Ex33 Simplifier : $A = 9(-3)^{2n}$ $B = 2^n.4^{n-3}$ $C = (2^3)^2$ $D = 4^{n-1}.3^{2n-2}$

Ex34 Écrire sous forme x^a : $A = \dfrac{1}{x^{4-n}}$ $B = \dfrac{x^2}{x^n}$ $C = \dfrac{x^n.y^n}{(xy)^4}$

Ex35 Écrire comme fractions de puissances positives (n naturel) : $A = x^{-5}$ $B = x^{n-4}$ $C = x^{2-n}$

Ex36 Écrire sous forme x^a : $A = x\sqrt{x}$ $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $C = \dfrac{x^4}{\sqrt{x}}$

Ex37 Écrire à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$: $A = x^{5/2}$ $B = x^{-3/2}$ $C = x^{11/2}$

Ex38 Écrire sous forme de produits d'entiers avec le moins de facteurs possibles :

$$A = \frac{3^4 \times 2^5 \times 5^6}{3^7 \times 2^9 \times 5^3} \qquad B = \frac{7^{12} \times (9^4)^3 \times 5^{-5}}{9^{10} \times (5^{-7})^6 \times 7^{-17}} \qquad C = \frac{(-4)^7 \times (-6)^2 \times 3^{-7}}{(-3)^5 \times 4^{-11} \times 6^{-3}}$$

Ex39 Simplifier : $A = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2}$ $B = \dfrac{x^4 - 9}{(x^2+3)^2}$ $C = \dfrac{(x-1)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^{-2}}$

Semaine 6 du 5 au 11 Août : Équations

• Une équation est une égalité comportant une (ou plusieurs) inconnue(s), souvent notée(s) x (y, z..). Résoudre une équation, c'est donner les valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation est vérifiée.

• On peut additionner, soustraire, multiplier de chaque côté de l'égalité par le même nombre (attention, multiplier par 0 ne donne pas une équation équivalente).

Exemples d'équations équivalentes ainsi obtenues :

$$4x + 8 = 0 \qquad 4x + 8 - 8 = -8 \qquad \frac{4x}{4} = -\frac{8}{4} \qquad x = -2$$

• Quand le produit de deux expressions est égal à 0, la première ou la deuxième est nulle.
Pour résoudre une équation polynomiale, on essaie donc de factoriser le polynôme en question...

• **Équation de degré** 2 : pour trouver les solutions d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, et s'il est positif les deux solutions (une seule si $\Delta = 0$) sont : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ex40 Résoudre : 1) $3x + 27 = 0$ 2) $4x - 6 = 2x + 8$ 3) $3 - 3x = 3(x + 5)$

Ex41 Résoudre : 1) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{x}{3} = 4x - \dfrac{1}{15}$ 3) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{9}{4}$

Ex42 Résoudre : 1) $(3x + 1)(x - 5) = 0$ 2) $(9x - 3)(-5x - 13) = 0$ 3) $(3x + 7)(4x - 8) = 0$

Ex43 Fatoriser puis résoudre :

1) $(3x + 2)(4x - 2) + (4x - 2)(x - 6) = 0$

2) $(7x - 2)(2 - 3x) + (4x + 3)(7x - 2) = 0$

3) $(9x - 4)(-2x + 5) - (9x - 4)(3x - 5) = 0$

Ex44 Factoriser à l'aide d'identités remarquables et résoudre alors l'équation :

1) $4x^2 - 40x + 100 = 0$

2) $(2x + 1)^2 - 49 = 0$

3) $(x + 5)^2 + 2(x + 5)(x - 3) + (x - 3)^2 = 0$

Ex45 Résoudre : 1) $x^2 + x - 2 = 0$ 2) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ 3) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

Ex46 Résoudre : 1) $x(4x^2 + 2x + 1) = 0$ 2) $(2x - 5)(x^2 - 49) = 0$ 3) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Semaine 7 du 12 au 18 Août : logarithmes et exponentielles

• Pour a et b réels strictement positifs et n naturel, on a les règles de calculs suivantes :

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1 \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln(a^n) = n\ln(a) \quad \ln(\tfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(\tfrac{1}{a}) = -\ln a$$

• Pour a et b réels, on a les règles de calculs suivantes :

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \qquad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b \qquad (\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab} \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$$

• Pour $a > 0$ et b réels : $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$ et $\ln(\mathrm{e}^b) = b$

Ex47 Écrire sous forme $a\ln(2)$: $A = \ln(16)$ $B = \ln(512)$ $C = \ln(72) - 2\ln 3$

Ex48 Écrire sous forme $a\ln(b)$: $A = \ln(2x) - \ln(x)$ $B = \ln(2x+2) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$C = 2\ln(x^4) - 3\ln(x^2) + \ln(x)$ $D = \ln(x+1) - \ln(x+2)$

Ex49 Exprimer simplement en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$:

$A = \ln(500)$ $B = \ln\left(\frac{16}{25}\right)$ $C = \ln(1/4)$ $D = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$

Ex50 Simplifier : $A = \ln(\sqrt{\mathrm{e}})$ $B = \ln(e^{1/3})$ $C = \mathrm{e}^{\ln(3)-\ln(2)}$ $D = \ln(\mathrm{e}^{-1/2})$

Ex51 Résoudre : 1) $\mathrm{e}^x = 2$ 2) $(\ln(x) - 2)(1 + \ln(x)) = 0$

3) $(\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 5) = 0$ 4) $(\ln(x) - 1)(6 - 3\ln(x)) = 0$

Ex52 Résoudre l'équation à l'aide d'un changement d'inconnue :

1) $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 15 = 0$ 2) $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 15 = 0$

Ex53 Simplifier : $A = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ $B = \ln((2+\sqrt{3})^{20}) + \ln((2-\sqrt{3})^{20})$

$C = \ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ $D = \ln(\sqrt{\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{e}^2)}})$

Semaine 8 du 19 au 25 Août : inéquations

• Une inéquation est une inégalité comportant une (ou plusieurs) inconnue(s), en général notée(s) x (y, z..). La résoudre, c'est trouver les valeurs des inconnues pour lesquelles l'inéquation est vérifiée.

• À partir d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente en additionnant un même réel à ses deux membres, ainsi qu'en les multipliant par un même **nombre strictement positif**.
Si on multiplie par un même nombre strictement négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

• Un moyen de traiter une inégalité consiste à la ramener à la comparaison d'un produit factorisé avec 0. On étudie alors le signe de chaque facteur, ce qu'on récapitule dans un tableau, puis on conclut. Dans les cas plus difficiles, on se ramène à l'étude d'une fonction.

Pour résoudre : $(3x-6)(-\frac{x}{2}+2) \geqslant 0$, on résout $3x-6 \geqslant 0$ (soit $x \geqslant 2$) et $-\frac{x}{2}+2 \geqslant 0$ (soit $x \leqslant 4$), puis le tableau donne le signe du produit étudié. L'ensemble des solutions est donc $[2, 4]$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(3x-6)$		$-$		$+$		$+$	
$(-\frac{x}{2}+2)$		$+$		$+$		$-$	
Produit		$-$		$+$		$-$	

Ex54 Résoudre : 1) $x+4 < -7$ 2) $3x < -2$ 3) $-2x < 8$ 4) $-5x \leqslant -15$

Ex55 Résoudre : 1) $5x-3 < -4x$ 2) $-3x+15 > -72-2x$ 3) $14x-25 \geqslant 17x+50$

Ex56 Résoudre : 1) $\frac{3x}{4}-\frac{2}{3} < -\frac{4}{9}$ 2) $\frac{2x}{5}+\frac{4}{7} \geqslant \frac{7x}{10}-\frac{3}{14}$ 3) $\frac{-3x}{7}+\frac{2}{5} \leqslant \frac{7x}{2}+\frac{3}{7}$

Ex57 Résoudre : 1) $(x-2)(2x+5)-(3x+3)(2x+5) > 0$ 2) $x \leqslant 2x(5x+3)$

3) $2x^2+3x \leqslant 0$ 4) $(x+3)(2x+1) \leqslant (2x+1)(4x+2)$

Ex58 Résoudre à l'aide d'un tableau de signes : 1) $1-\frac{1}{x+3} \leqslant 0$ 2) $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+3}$ 3) $\frac{x^2-3x+2}{\mathrm{e}^x-1} \geqslant 0$

Ex59 Résoudre : 1) $\ln(2x-3) \leqslant \ln(5)$ 2) $\frac{x^3+5x^2}{6x} \leqslant 1$ 3) $\mathrm{e}^x > x$ (étudier la fonction différence)

Partie II : Corrigés des exercices

Semaine 1 : trigonométrie (corrigés)

Ex1 $A = \sin(x + 2\pi + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\quad B = \cos(4 \times (2\pi) - x) = \cos(-x) = \cos(x)$

$C = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad D = \cos(-\frac{\pi}{6} - \pi) = -\cos(-\frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Preuve par récurrence sur n : $\sin(x) = (-1)^0 \sin(x)$ et pour $n \geqslant 1$, $\sin(x + (n-1)\pi + \pi) = -\sin(x + (n-1)\pi)$ permet de conclure : $E = \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$. De même on établit : $F = (-1)^n \cos(x)$

Ex2 $A = \cos(x + \pi + \frac{\pi}{2}) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

$B = \sin(-x + 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(-x + \frac{\pi}{2}) = -\cos(-x) = -\cos(x)$

$C = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ $\quad D = \sin(x - \frac{\pi}{2} - \pi) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

Ex3 $A = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$B^2 = \cos^2(\frac{5\pi}{12}) = \frac{1 + \cos(\frac{5\pi}{6})}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, et comme $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, on a $B > 0$ donc : $B = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$C^2 = \sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, et comme $C > 0$, $C = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

$D^2 = \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$, et comme $D > 0$, $D = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

Ex4 $A = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$

$B = \frac{1 - \cos(4x)}{2}\cos(x) = \frac{\cos(x)}{2} - \frac{1}{4}(\cos(5x) + \cos(3x))$

$C = \cos^2(x)\cos(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}\cos(x) = \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\cos(3x) + \cos(x)}{4} = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$

$D = \sin^3(x) = \sin^2(x)\sin(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{1}{4}(\sin(3x) - \sin(x)) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$

Ex5 $A = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x))$ donc $A = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$B = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) = 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x))$ et finalement : $B = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

$C = 2\cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ et $D = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{3x}{2})$

Ex6 1) On résout : $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$, les solutions sont les $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) On résout : $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\cos\frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos(\frac{3\pi}{4})\right)$, les solutions sont les $\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, ou plus simplement $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

3) On résout : $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{2})$, les solutions en $2x$ sont les $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, donc les solutions sont les $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ ou encore les $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

4) On résout : $\sin(3x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\pm\frac{\pi}{3})$ de solutions en $3x$ les $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, donc de solutions en x les $\pm\frac{\pi}{9} + 2k\pi/3$, $\frac{4\pi}{9} + 2k\pi/3$, et $\frac{2\pi}{9} + 2k\pi/3$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

5) On résout : $\sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$ de solutions vérifiant : $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, soit les solutions $\frac{\pi}{10} + k\pi/5$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

6) Les solutions vérifient $x = 2x + 2k\pi$ ou $x = -2x + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, soit les solutions $2k\pi$ et $2k\pi/3$ pour $k \in \mathbb{Z}$, ce qui se résume au solutions $2k\pi/3$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Semaine 2 : calcul littéral (corrigés)

Ex7 $A = 3 - x + 9 - 2x + x^2 = 12 - 3x + x^2$ $\qquad$ $B = 4 - 4x + x^2 - x - 2 - x^2 = 2 - 5x$

$$C = 2x^2 - x + 4 - x^2 + 6x - 9 = x^2 + 5x - 5$$

Ex8 $A = 3x^2 + 5x$ $\qquad$ $B = 8 - 24x$ $\qquad$ $C = -10 + 2x$ $\qquad$ $D = -2x + x^2$

Ex9 $A = 3x^2 + 2x + 15x + 10 = 3x^2 + 17x + 10$ $\qquad$ $B = 6x - 18x^2 - 8 + 24x = -18x^2 + 30x - 8$

$C = -15x^2 + 3x^3 + 10 - 2x = 3x^3 - 15x^2 - 2x + 10$ $\qquad$ $D = -2x - 1 + 2x^2 + x = 2x^2 - x - 1$

Ex10 Par reconnaissance d'identités remarquables :

$A = 9x^2 + 12x + 4$ $\qquad$ $B = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$ $\qquad$ $C = (5 - x)(5 + x) = 25 - x^2$ $\qquad$ $D = (2 + 3x)(2 - 3x) = 4 - 9x^2$

Ex11 Pour A : facteur x, $\quad A = x(3x + 2 - (2x + 5)) = x(x - 3)$

Pour B : facteur x, $\quad B = x(2x + 5 - x) = x(x + 5)$

Pour C : facteur $(2x + 5)$, $\quad C = (2x + 5)(3x + 7 - (2x + 4)) = (2x + 5)(x + 3)$

Pour D : facteur $2x + 4$, $\quad D = 2(x + 2)(3x - 2 - (2x + 1)) = 2(x + 2)(x - 3)$

Pour E : facteur $x(x - 3)$, $\quad E = x(x - 3)(x - 6)$

Pour F : facteur $(x + 1)(1 - 2x)$, $\quad F = (x + 1)(1 - 2x)(x - 1 + 1 - 2x) = -x(x + 1)(1 - 2x)$

Ex12 Par utilisation d'identité remarquable :

$A = (x + 3)^2$ $\qquad$ $B = (2x - 1)^2$ $\qquad$ $C = (8x - 3)(8x + 3)$ $\qquad$ $D = -(x + 1)^2$ $\qquad$ $E = (5x - 1)^2$

Ex13 $A = (x - 3 - 3)(x - 3 + 3) + x(x - 6) = x(x - 6 + (x - 6)) = 2x(x - 6)$

$B = ((x - 5) + 2))^2 + 2(x - 3) = (x - 3)(x - 3 + 2) = (x - 3)(x - 1)$

$C = (x^2 - 1)^2 - 9 = ((x^2 - 1) - 3)((x^2 - 1) + 3) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2)$

$D = 2x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $\qquad$ $E = -13$ $\qquad$ $F = 2x^2 - 8x + 7$

Semaine 3 : Fractions (corrigés)

Ex14 $A = \frac{117}{144} = \frac{39}{48} = \frac{13}{16}$ $\qquad$ $B = \frac{2x(x - 1)(2 - x)}{x(2 - x)} = 2(x - 1)$ $\qquad$ $C = \frac{x^3(1 + x^3)}{1 + x^3} = x^3$

Ex15 1) $\frac{3}{5} < \frac{5}{9}$ équivaut à $27 < 25$, on choisit $>$ 2) De même : $\frac{12}{11} > \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ 3) $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$

Ex16 $A = \frac{6.7.5}{21.33.7} = \frac{2.5}{7.33} = \frac{10}{231}$ $B = \frac{x(x-2)(x+3)x}{(2-x)x^2(x+3)} = -1$ $C = \frac{2(x+2)(x-2)}{-2(x-2)(x+2)} = -1$ $D = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$

Ex17 $A = \frac{1}{5}$ $B = \frac{2}{25}$ $C = -2$ $D = \frac{2}{5}$

Ex18 $A = \frac{2x}{5} - 1$ $B = \frac{x^2}{25} + \frac{2x}{15} - \frac{8}{9}$ $C = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{25}$

Ex19 $A = \frac{2}{25}(5x-3)$ $B = \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{3}\right)^2$ $C = \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{5}{7}\right)$

Ex20 $A = \frac{1}{n}$ $B = \frac{2}{n(n-1)}$ $C = \frac{6(n+1)n^2(n-1)^2}{2n(n-1)^2 2(n+1)} = \frac{3n}{2}$

Ex21 $A = \frac{1}{5.7} + \frac{1}{2.5} = \frac{2+7}{70} = \frac{9}{70}$ $B = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ $C = \frac{20-21+30}{180} = \frac{29}{180}$ $D = \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{6-9+4}{2.2.3.3} = -\frac{1}{36}$

$E = \frac{12x-8-2x+1}{4x(2x-1)(x+1)(3x-2)} = \frac{10x-7}{4x(2x-1)(x+1)(3x-2)}$ $F = \frac{5x+12}{x^2-1}$ $G = \frac{2-3n}{2n^2}$ $H = \frac{x^4-x^4-1}{x^9} = -\frac{1}{x^9}$

Ex22 $A = \frac{2.7.5}{7.33.7} = \frac{10}{231}$ $B = \frac{23.7}{12.4} - \frac{1}{2} = \frac{161-24}{48} = \frac{137}{48}$ $C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{28}} = \frac{84}{50} = \frac{42}{25}$

Ex23 $A = \frac{24+5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$ $B = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$ $C = \frac{22}{3} = 7 + \frac{1}{3}$

Semaine 4 : Racines carrées et valeurs absolues (corrigés)

Ex24 $A = \sqrt{x}$ $B = x\sqrt{x}$ $C = \frac{x\sqrt{x}}{8}$ $D = 3$ si $x > 0$, $D = -1$ sinon

Ex25 1) $2\sqrt{2}$ 2) $4\sqrt{3}$ 3) $2\sqrt{21}$ 4) $6\sqrt{5}$

Ex26 $A = 5$ $B = 32$ $C = x^2 + 1$ $D = x + 1$ si $x \geqslant -1$, $D = -x - 1$ si $x \leqslant -1$

Ex27 $A = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{3} - \sqrt{6} - 15$ $B = 7 + 2\sqrt{10}$ $C = x^2 + 1 - x^2 = 1$

Ex28 $A = 3\sqrt{6}\,|x|$ $B = 3 - 1 = 2$ $C = x + 1 - 1 = x$ (on a $x \geqslant -1$)

Ex29 $A = \frac{5(1-\sqrt{6})}{1-6} = \sqrt{6} - 1$ $B = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2-3} = -4 - 2\sqrt{3}$ $C = \frac{x(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$

Ex30 $A = 2$ $B = \frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$ $C = \frac{1+\sqrt{t^2+1}+t^2}{\sqrt{t^2+1}+1+t^2} = 1$

Semaine 5 : Puissances (corrigés)

Ex31 $A = 1$ $B = -1$ $C = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$ $D = 3.3^n = 3^{n+1}$

Ex32 $A = 2^{20}$ $B = 3^2$ $C = 21^5$ $D = 9.15^4$ $E = 4^{-3}$ $F = 4.(4/5)^2$ $G = 4^5$ $H = 3^{-2}$

Ex33 $A = 9^{n+1}$ $B = 2^{3n-6}$ $C = 2^6$ $D = 6^{2n-2}$

Ex34 $A = x^{n-4}$ $B = x^{2-n}$ $C = (xy)^{n-4}$

Ex35 $A = \dfrac{1}{x^5}$ $B = \dfrac{x^n}{x^4}$ $C = \dfrac{x^2}{x^n}$

Ex36 $A = x^{3/2}$ $B = x^{-1/2}$ $C = x^{7/2}$

Ex37 $A = x^2\sqrt{x}$ $B = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $C = x^5\sqrt{x}$

Ex38 $A = 3^{-3}.2^{-4}.5^3$ $B = 7^{29}.9^2.5^{37}$ $C = 4^{18}.6^5.3^{-12} = 2^{41}.3^{-7}$

Ex39 $A = 1$ $B = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ $C = (x-1)^5$

Semaine 6 : Équations (corrigés)

Ex40 1) $x = -9$ 2) $x = 7$ 3) $x = -2$

Ex41 1) $x = 3/2$ 2) $x = 7/65$ 3) $x = 23/3$

Ex42 1) $3x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$: solutions $-1/3$ et 5

2) $9x - 3 = 0$ ou $5x + 13 = 0$, solutions $1/3$ et $-13/5$

3) $3x + 7 = 0$ ou $4x - 8 = 0$, solutions $-7/3$ et 2

Ex43 1) $(4x-2)(3x+2+x-6) = 8(2x-1)(x-1) = 0$, solutions $1/2$ et 1

2) $(7x-2)(2-3x+4x+3) = (7x-2)(x+5) = 0$, solutions $2/7$ et -5

3) $(9x-4)(-2x+5-3x+5) = (9x-4)(-5x+10) = 0$, solutions $4/9$ et 2.

Ex44 1) $(2x-10)^2 = 0$, solution 5

2) $(2x+1-7)(2x+1+7) = 0$, solutions 3 et -4

3) $((x+5)+(x-3))^2 = 0$, solution -1

Ex45 1) $\Delta = 3^2$, racines 1 et -2

2) $\Delta = 4^2$, racines -1 et $1/3$

3) $\Delta = 4^2$, racines 1 et $-1/3$

Ex46 1) Le discriminant de $4x^2+2x+1$ est strictement négatif, solution 0

2) $(2x-5)(x-7)(x+7)=0$, solutions $5/2$, 7 et -7

3) $(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2=0$, solutions 2 et -2

Semaine 7 : logarithmes et exponentielles (corrigés)

Ex47 $A=\ln(2^4)=4\ln(2)$ $\quad B=\ln(2^9)=9\ln(2)$ $\quad C=\ln(8.9)-2\ln(3)=3\ln(2)$

Ex48 $A=\ln(2)$ $\quad B=\ln(2)+\ln(x+1)-\ln(x+1)=\ln(2)$ $\quad C=(8-6+1)\ln(x)=3\ln(x)$ $\quad D=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

Ex49 $A=\ln(5^3.2^2)=3\ln(5)+2\ln(2)$ $\quad B=\ln\left(\frac{2^4}{5^2}\right)=4\ln(2)-2\ln(5)$

$C=-2\ln(2)$ $\quad D=-\ln(100)=-2\ln(2)-2\ln(5)$

Ex50 $A=1/2$ $\quad B=1/3$ $\quad C=3/2$ $\quad D=-1/2$

Ex51 1) Solution $\ln(2)$ 2) Solutions e^2 et $1/\mathrm{e}$ 3) Solution $\ln(3)$ 4) Solutions e et e^2

Ex52 1) Poser $X=\mathrm{e}^x$, les solutions en X sont $1\pm\sqrt{2}$, l'unique solution en x est $\ln(1+\sqrt{2})$

2) Poser $X=\ln(x)$, les solutions en x sont $\mathrm{e}^{1\pm\sqrt{2}}$

Ex53 $A=\ln\left(\frac{5-1}{4}\right)=0$ $\quad B=20\ \ln(4-3)=0$ $\quad C=(2-1)\ln(\mathrm{e})=1$ $\quad D=\ln(1/\mathrm{e})=-1$

Semaine 8 : inéquations (corrigés)

Ex54 Ensemble des solutions : 1) $]-\infty,-11[$ 2) $]-\infty,-2/3[$ 3) $]-4,+\infty[$ 4) $[3,+\infty[$

Ex55 Ensemble des solutions : 1) $]-\infty,1/3[$ 2) $]-\infty,87[$ 3) $]-\infty,-25]$

Ex56 Ensemble des solutions : 1) $]-\infty,8/27[$ 2) $]-\infty,55/21]$ 3) $[-2/275,+\infty[$

Ex57 1) $(2x+5)(x-2-3x-3)=(2x+5)(-2x-5)=-(2x+5)^2$ est toujours trictement négatif : pas de solution.

2) $x(10x+6-1)=5x(2x+1)\geqslant 0$ a pour en ensemble de solutions $]-\infty,-1/2]\cup[0,+\infty[$

3) $x(2x+3)\leqslant 0$ a pour ensemble de solutions $[-3/2,0]$

4) $(2x+1)(4x+2-x-3)=(2x+1)(3x-1)\geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty,-1/2]\cup[1/3,+\infty[$

Ex58 1) $\frac{x+2}{x+3}\leqslant 0$ a pour ensemble de solutions $]-3,-2]$

2) $\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}>0$ a pour ensemble de solutions $]-3,1[\cup]5,+\infty[$

3) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ est négatif entre 1 et 2, et e^x-1 est positif pour x positif. Ensemble de solutions : $]0,1]\cup[2,+\infty[$

Ex59 1) Par croissance stricte de l'exponentielle, l'inéquation équivaut à $2x-3\leqslant 5$ sous la condition $2x-3>0$ (définition du logarithme). L'ensemble des solutions est donc $]3/2,4]$.

2) $\frac{x^3+5x^2-6x}{6x}=\frac{x(x-1)(x+6)}{6x}=(x-1)(x-6)$ donc l'ensemble des solutions est $[1,6]$.

3) Posons $f:x\mapsto\mathrm{e}^x-x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x\mapsto\mathrm{e}^x-1$. Cette fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$, admet donc un minimum en 0 de valeur 1, donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

Partie III : le devoir 1, à rendre le 2-9-24

Exercice I

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x+2}$

On note $\mathcal{C}$ le graphe de f dessiné dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f, et déterminer les variations de f sur $\mathcal{D}$.

2. Vérifier que f admet deux extrema locaux et donner leurs coordonnées.

3. Montrer que $f(x)/x$ admet une limite finie a en $+\infty$, et donner a.

4. Montrer que $f(x) - ax$ admet une limite finie b en $+\infty$, et donner b.

5. Montrer que $\varphi(x) = f(x) - (ax+b)$ tend vers 0 par valeurs supérieures en $+\infty$.
Interpréter géométriquement ce résultat (utiliser la droite d'équation $y = ax + b$).

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.

7. Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice II

1. Calculer les intégrales suivantes :

1.a. $\displaystyle\int_0^1 (4x+1)(2x^2+x-1)^2\,\mathrm{d}x$ **1.b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ **1.c.** $\displaystyle\int_1^2 2t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ **1.d.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{2-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$

2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout réel x distinct de 0 et -1, on ait : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

En déduire : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ (exprimer $\cos^2(t)$ à l'aide de l'angle double)

4. $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties : $\int u'v = uv - \int uv'$.

Exercice III

Pour n naturel et $x > 0$, on pose : $f_n(x) = \ln(x) + nx$

1. Étudier les variations de la fonction f_n et ses limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$. On a donc : $\ln(x_n) + nx_n = 0$

3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de la suite (x_n).

4. Montrer que la suite (x_n) est convergente. On note l sa limite.

5. On suppose $l > 0$: arriver à une contradiction. En déduire que $l = 0$.

6. On pose : $y_n = nx_n$. Montrer que la suite (y_n) tend vers $+\infty$.

7. Montrer que : $y_n + \ln(y_n) = \ln(n)$.

8. Montrer que pour tout réel $x > 1$: $0 \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{x}(\sqrt{x}-1)$. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

9. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{\ln(n)} = 1$

On a donc montré que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right) x_n = 1$