Chapitre UDM1 Unités et dimensions

1.1 UNITÉS DU SYSTÈME INTERNATIONAL

1.1.1 Unités de base

◇ Dimension

Elle donne la nature (le type) de grandeur considérée. Deux grandeurs ont la même dimension quand elles peuvent être comparées et classées entre elles.

◇ Étalon

C'est un système utilisé comme référence pour une unité. La définition des étalons repose (depuis 2019) sur 7 constantes physiques dont les valeurs ont été fixées à la suite de mesures très précises reposant sur des lois physiques connues et éprouvées.

◇ Unité d'une grandeur

Elle permet d'exprimer la valeur d'une grandeur physique par rapport à un **étalon** connu. Chaque unité est associée à un symbole, généralement constitué des premières lettres de son nom.

◇ Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)

Organisation internationale créée en 1875 qui fait référence pour élaborer le système mondial de mesures.

◇ Système international d'unités (SI)

C'est le système d'unités adopté dans le monde entier (à l'exception de 5 pays). Il est défini par des unités de base qui peuvent être combinées pour former toutes les autres unités.

◇ Unités de base du SI

Grandeur	Nom	Symbole	Définition
durée	seconde	s	La fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé se produit 9 192 631 770 fois par seconde.
longueur	mètre	m	C'est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458$ seconde.
masse	kilogramme	kg	Il est déterminé en fixant la valeur de la constante de Planck à $h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
intensité électrique	ampère	A	C'est le courant électrique correspondant au flux de $1/(1,602\,176\,634 \times 10^{-19})$ charges élémentaires par seconde.
température	kelvin	K	Le kelvin correspond à l'échange d'énergie thermique $k_B T = 1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J}$ où $k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ est la valeur exacte de la constante de Boltzmann.
quantité de matière	mole	mol	Une mole contient exactement $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaire. Cette valeur numérique correspond à la valeur de la constante d'Avogadro.
intensité lumineuse	candela	cd	Cette unité correspond à l'intensité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ dans une direction donnée, avec pour intensité énergétique $(1/683) \text{ W} \cdot \text{sr}^{-1}$

◇ Multiples et sous-multiples décimaux du SI

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
déca	da	10^1	déci	d	10^{-1}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
téra	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
péta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}
zetta	Z	10^{21}	zepto	z	10^{-21}
yotta	Y	10^{24}	yocto	y	10^{-24}
ronna	R	10^{27}	ronto	r	10^{-27}
quetta	Q	10^{30}	quecto	q	10^{-30}

1.1.2 Unités dérivées du SI

◇ Unité dérivée

Une unité dérivée du SI est construite grâce à une relation entre différentes grandeurs qui sont elles-mêmes exprimées en unités SI.

Quantité dérivée	Nom	Symbole
aire	mètre carré	m^2
volume	mètre cube	m^3
vitesse	mètre par seconde	$m \cdot s^{-1}$
accélération	mètre par seconde carrée	$m \cdot s^{-2}$
masse volumique	kilogramme par mètre cube	$kg \cdot m^{-3}$
volume spécifique	mètre cube par kilogramme	$m^3 \cdot kg^{-1}$
concentration molaire	mole par mètre cube	$mol \cdot m^{-3}$

◇ Unités dérivées avec un symbole spécial

- Certaines grandeurs disposent d'une unité dérivée du SI ayant son propre symbole et son nom.
- Il est d'usage d'utiliser ces unités dérivées, et non la combinaison dans les unités de base.
- Le symbole et le nom honorent souvent une personnalité des sciences physiques ayant contribué largement au domaine associé.

Quantité dérivée	Nom spécial	Symbole spécial	Unité SI	Relation aide-mémoire
angle plan	radian	rad	$m \cdot m^{-1}$	
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}	$f = 1/T$
force	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	$F = m a$
pression, contrainte	pascal	Pa	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	$P = F/S$
énergie, travail	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$E = m c^2$
puissance	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	$P = \Delta E / \Delta t$
charge électrique	coulomb	C	$A \cdot s$	$Q = I \times \Delta t$
tension électrique	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$	$P = U I$
résistance électrique	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot A^{-2} \cdot s^{-3}$	$U = R I$
vergence	dioptrie	δ	m^{-1}	$C = \frac{1}{f'}$
température	celsius	$^{\circ}C$	K	

◇ Unités usuelles tolérées

Le SI tolère l'utilisation de certaines unités qui ont été consacrées par l'usage dans certains domaines où l'ordre de grandeur le justifie, ou bien par coutume.

Nom spécial	Symbole	Conversion dans le SI
minute	min	1 min = 60 s
heure	h	1 h = 60 min = 3 600 s
degré (angle)	°	1° = ($\pi/180$) rad
minute d'arc (angle)	'	1' = (1/60)°
seconde d'arc (angle)	"	1" = (1/60)' = (1/3 600)°
litre (volume)	L	1 L = 1 dm ³
électronvolt (énergie)	eV	1 eV = 1,602 177 × 10 ⁻¹⁹ J
dalton (unité de masse atomique)	Da, u	1 Da = 1 u = 1,660 540 × 10 ⁻²⁷ kg

◇ Conversion d'unités

- Une conversion consiste à changer d'unité, mais la dimension de la grandeur reste la même.
- Si la conversion implique un préfixe, celui-ci peut être élevé à une puissance positive ou négative et combiné à d'autres symboles pour former d'autres unités.
- Certaines unités hors du SI sont tolérées, mais leur conversion se fait avec un facteur numérique différent de un (1). Les préfixes du SI peuvent être utilisées avec elles.

1.2 ANALYSE DIMENSIONNELLE

◇ Dimensions de base

Dimensions de base du SI	Notation
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité lumineuse	J

- La dimension d'une grandeur Q s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel

$$\dim Q = \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{L}^\beta \cdot \mathbf{M}^\gamma \cdot \mathbf{I}^\delta \cdot \mathbf{\Theta}^\varepsilon \cdot \mathbf{N}^\zeta \cdot \mathbf{J}^\eta$$

où les exposants sont des nombres généralement rationnels et de faible valeur.

- Un facteur numérique est sans dimension.

♠ Homogénéité d'une relation

- Deux membres d'une équation doivent être **homogènes**, c'est-à-dire qu'on peut les exprimer dans la même unité.
- Un résultat non homogène est nécessairement faux.
- Un résultat homogène n'est pas nécessairement correct.

♠ Usages de l'analyse dimensionnelle

- Vérifier l'homogénéité d'une relation.
- Déterminer une loi ou une grandeur à partir d'autres grandeurs du problème.
- Estimer un ordre de grandeur dans un problème.

Remarques :

- En pratique, on préfère souvent faire l'analyse dimensionnelle en vérifiant la cohérence des unités. C'est parfaitement valable, même si cela conduit à des abus dans les notations préconisées par le BIPM.
- Pour faire une analyse dimensionnelle, il n'est pas nécessaire de remonter jusqu'aux unités de base. La cohérence peut être vérifiée avec des grandeurs dérivées (comme la vitesse, la pression, etc.)

Chapitre UDM2 Précision et incertitudes

2.1 CHIFFRES SIGNIFICATIFS

♠ Notation scientifique

Un nombre écrit en notation scientifique est de la forme :

$$a \times 10^n \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1 \leq a < 10 \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad a \text{ écrit sous forme décimale}$$

Vu que $10^0 = 1$, on omet souvent de l'écrire lorsqu'il doit être utilisé.

◇ Lien avec la notion de précision

Lorsque l'on exprime la valeur d'une grandeur physique, le nombre de chiffres avec lequel on écrit le résultat reflète « à combien près » on connaît cette valeur.

◇ Chiffre significatif

- Un chiffre est dit **significatif** lorsque sa valeur peut être **mesurée ou connue** avec précision.
- Le nombre de chiffres significatifs d'une valeur est le nombre de chiffres qui apparaissent dans son écriture scientifique.
- Le **zéro** peut être un chiffre significatif!

♣ Cas de l'addition et de la soustraction

Quand on additionne deux grandeurs, le résultat final est aussi précis que la donnée la moins précise. On fait le calcul avec tous les chiffres, puis on arrondit si nécessaire pour que le résultat final soit écrit correctement.

Exemples :

Calcul	Écriture du résultat	Explication
$3,23 \text{ V} + 10 \text{ V} = 13,23 \text{ V}$	13 V	La 2 ^{ème} donnée s'écrit au V près.
$15,8 \text{ g} - 6,745 \text{ g} = 9,055 \text{ g}$	9,1 g	La 1 ^{ère} donnée s'écrit à 0,1 g près.
$1,56 \times 10^4 \text{ m} + 2,3 \times 10^5 \text{ m} = 2,456 \times 10^5 \text{ m}$	$2,5 \times 10^5 \text{ m}$	La deuxième donnée est précise à $0,1 \times 10^5 \text{ m} = 1 \times 10^4 \text{ m}$ près.

♣ Cas de la multiplication et de la division

Quand on multiplie ou divise deux grandeurs entre elles, le résultat a autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemple :

- La masse m d'un objet en or de masse volumique $\rho = 19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ et de volume $V = 1570 \text{ cm}^3$ vaut :

$$m = \rho V = 19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \times 1570 \text{ cm}^3 = 30301 \text{ g}$$

Le résultat ne doit comporter que 3 chiffres significatifs, donc il s'écrit $m = 3,03 \times 10^4 \text{ g}$.

- Un coureur parcourt $d = 100 \text{ m}$ en $\Delta t = 15 \text{ s}$. Sa vitesse moyenne vaut : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{15 \text{ s}} = 6,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

♣ Enchaînement de plusieurs calculs

Si un résultat doit être réutilisé dans un calcul ultérieur, il faut utiliser un à deux chiffres de plus que le nombre de chiffres significatifs utilisés pour écrire le résultat. Cela permet d'éviter de propager successivement des arrondis au cours du calcul et que le résultat devienne trop différent de celui attendu. **Dans la mesure du possible : limiter les calculs intermédiaires.**

2.2 INCERTITUDES

2.2.1 Notion d'incertitude

◇ Mesure d'une grandeur

C'est un ensemble d'opérations (actions, calculs) qui vise à déterminer la valeur d'une grandeur physique.

◇ Résultat — Estimation

C'est la valeur que l'on obtient à la suite d'une mesure.

◇ Incertitude

Elle caractérise la dispersion des valeurs qu'on pense raisonnablement pouvoir attribuer à la grandeur mesurée. Plus elle est petite, meilleur est le processus de mesure.

♠ Présentation d'un résultat doté d'une incertitude

$$X = (x \pm u_x) \text{ unité}$$

X : symbole de la grandeur mesurée

x : valeur de la mesure

u_m : incertitude de la mesure

Résultat incorrect	Comment corriger	Résultat correct
$R = (156,2 \pm 0,629) \Omega$	On ne garde qu'un chiffre sur l'incertitude, en majorant sa valeur.	$R = (156,2 \pm 0,7) \Omega$
$T = (0,75386 \pm 0,04) \text{ s}$	La valeur doit s'arrêter à la même décimale que l'incertitude. On fait un arrondi .	$T = (0,75 \pm 0,04) \text{ s}$
$v = (9,821 \pm 0,526) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	On ne garde qu'un chiffre pour l'incertitude puis on écrit la valeur mesurée avec le bon nombre de chiffres	$v = (9,8 \pm 0,6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

♠ Incertitude relative (ou fractionnaire)

Pour une mesure de X donnant la valeur $x_m \pm u_x$, l'incertitude relative est donnée par :

$$\varepsilon \equiv \frac{u_x}{x_m}$$

Elle est parfois exprimée en pourcentage.

◇ Désaccord

C'est la différence entre deux mesures d'une même grandeur.

◇ Nécessité de comparaison entre valeur mesurée et valeur acceptée

- Une mesure en soi n'a aucun intérêt à moins de procéder à une comparaison avec une valeur acceptée.
- La valeur acceptée est déjà connue et publiée. Elle peut provenir de la théorie ou de mesures en accord avec une loi physique.

Remarque : Une valeur acceptée est elle-même dotée d'une incertitude en général, mais elle est bien plus faible que ce l'on pourrait obtenir par l'expérience que l'on réalise a priori.

◇ Compatibilité et intervalle de confiance

Une valeur mesurée $x_m \pm u_x$ est dite compatible avec une valeur acceptée x_a si :

$$x_a \in [x_m - u_x, x_m + u_x]$$

L'intervalle ci-dessus est appelé **intervalle de confiance** et il est systématiquement associé à une probabilité de s'en trouver au-dehors.

2.2.2 Composition des incertitudes

♣ Composition des incertitudes pour une somme ou une différence

Si une grandeur (X, u_X) est la somme ou la différence de plusieurs autres (x_i, u_i) , on additionne les incertitudes de chaque grandeur :

$$u_X = \sum_i u_i$$

♣ Composition des incertitudes pour une multiplication ou une division

Si une grandeur (X, u_X) est le produit de plusieurs autres (x_i, u_i) , l'incertitude relative résultante est associée à la somme quadratique des incertitudes relatives.

$$\frac{u_X}{X} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2}$$

♣ Composition des incertitudes

Cas	Expression grandeur	Expression incertitude	Commentaire
Addition/soustraction	$X = \sum y_i - \sum z_i$	$u_X = \sum u_{y_i} + \sum u_{z_i}$	On fait la somme des incertitudes, même en cas de soustraction.
Multiplication	$X = \prod x_i$	$\frac{u_X}{X} = \sqrt{\sum \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2}$	On fait la somme des carrés des incertitudes relatives.
Inverse	$X = \frac{1}{y}$	$\frac{u_X}{X} = \frac{u_y}{y}$	Les incertitudes relatives sont identiques.
Division	$X = \frac{y}{z}$	$\frac{u_X}{X} = \sqrt{\left(\frac{u_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{u_z}{z}\right)^2}$	On fait la somme des carrés des incertitudes relatives.
Puissance	$X = x^\alpha$	$\frac{u_X}{X} = \alpha \frac{u_x}{x}$	Les incertitudes relatives sont proportionnelles à l'exposant.
Cas général	$y = f(x)$	$u_y = \left \frac{dy}{dx} \right u_x$	L'erreur doit être assez petite pour que l'approximation soit légitime (pente de la courbe faible).

♣ Méthode de Monte-Carlo

Soit une grandeur Y , estimée à partir des valeurs x_i de grandeurs X_i de sorte que sa valeur soit donnée $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, avec chaque X_i évalué à u_i près. Si les grandeurs X_i sont indépendantes les unes des autres, on peut évaluer u_y comme étant la dispersion d'un très grand nombre de résultats du calcul de y , conséquence de la dispersion de chaque variable.

2.2.3 Les types d'incertitude

◇ Incertitude de type A

C'est l'incertitude qui provient de la dispersion statistique des résultats lorsque l'on répète N fois une mesure.

♠ Évaluation d'une incertitude de type A

On réalise N mesures de la grandeur X . Les résultats ont différentes valeurs $(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Grandeur calculée	Signification	Valeur
moyenne	meilleure estimation de X	$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
écart-type standard	dispersion statistique des valeurs autour de la moyenne	$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}$
incertitude au seuil de 95%	la véritable valeur de X a 95% de chance de se trouver entre $x_m - u_x$ et $x_m + u_x$.	$u_x = \frac{2\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$

◇ Incertitude de type B

Lorsque l'on ne dispose que d'une unique mesure, on peut évaluer l'incertitude de différentes manières. Cela peut dépendre notamment :

- des propriétés de l'appareil de mesure (classe, calibre, résolution);
- des spécifications d'un fabricant sur le matériel (précision de la verrerie en chimie);
- de la méthode employée pour exécuter la mesure.

♠ Incertitude de lecture : graduation (ou résolution) de valeur a

Lecture unique	$u = \frac{a}{\sqrt{12}}$
Deux lectures (début et fin)	$u = \frac{a}{\sqrt{6}}$