Cours de Physique

Mécanique

Romain BERTHELARD

Après étirement, Luffy se lance vers Wapol, ***One Piece, Eiichiro Oda***

2025-2026
MPII — Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon

Table des matières

1 Cinématique du point **1**
1.1 Hypothèses et cadre de la mécanique classique . . . 1
1.1.1 Vocabulaire de base . . . 1
1.1.2 Notion de référentiel . . . 1
1.1.3 Au-delà de la mécanique classique . . . 2
1.2 Grandeurs cinématiques . . . 2
1.3 Systèmes de coordonnées . . . 3
1.3.1 Coordonnées cartésiennes . . . 3
1.3.2 Coordonnées polaires . . . 3
1.3.3 Coordonnées cylindriques . . . 4
1.3.4 Coordonnées sphériques . . . 5
1.4 Mouvements particuliers . . . 6

2 Dynamique du point **7**
2.1 Interactions et forces . . . 7
2.2 Masse et quantité de mouvement . . . 9
2.3 Principes fondamentaux de la dynamique . . . 9
2.3.1 Énoncé des lois de Newton . . . 9
2.3.2 Trajectoire balistique . . . 10
2.3.3 Chute verticale freinée . . . 11
2.3.4 Système masse-ressort . . . 12
2.3.5 Pendule simple . . . 13
2.3.6 Particule chargée dans un champ électrique uniforme . . . 14
2.3.7 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme . . . 14

3 Énergétique du point **15**
3.1 Travail d'une force . . . 15
3.2 Champ de forces conservatives . . . 16
3.3 Différentes formes d'énergie . . . 17
3.4 Théorèmes de l'énergie . . . 18
3.5 Équilibre et stabilité . . . 18
3.5.1 Mouvement conservatif et formes de potentiel . . . 18
3.5.2 Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable . . . 19

Chapitre M1 Cinématique du point

1.1 Hypothèses et cadre de la mécanique classique

1.1.1 Vocabulaire de base

♢ **Mécanique**
Domaine de la physique qui s'intéresse à l'équilibre ou au mouvement de systèmes matériels.

♢ **Mécanique classique**
Branche de la mécanique où le système a un état défini à tout instant, et dont l'évolution est déterministe.

♢ **Mécanique newtonienne**
Branche de la mécanique classique reposant sur les lois de Newton, et plus particulièrement sur la deuxième qui fournit les équations du mouvement.

♢ **Système**
C'est un corps ou un objet que l'on étudie. Tout le reste est considéré comme « extérieur ».

♢ **Mouvement**
Changement de position d'un système au cours du temps.

♢ **Trajectoire**
Ce sont les différentes positions que le système occupe au cours de son mouvement. La forme de la trajectoire peut être typiquement :

- rectiligne (forme d'une droite)
- circulaire (tout ou partie d'un cercle)
- curviligne (ligne courbe quelconque)

♢ **Cinématique**
Étude du mouvement (position, vitesse, etc.) d'un objet, sans s'intéresser aux causes du mouvement ou de ses variations. Ce fût longtemps une branche enseignée en mathématiques (courbes paramétrées).

♢ **Dynamique**
Étude des causes du mouvement et de l'évolution de celui-ci.

1.1.2 Notion de référentiel

♢ **Référentiel**
Il s'agit généralement d'un solide, que l'on considère comme immobile, depuis lequel le mouvement du système est observé et étudié. On associe à ce repère une horloge qui permet de compter les durées.

♢ **Référentiel galiléen**
C'est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié sur la durée du mouvement.

♢ **Référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire**
Référentiel associé à la surface terrestre, dans lequel le lieu où se déroule l'expérience est considéré comme immobile. Il est adapté pour décrire la plupart des mouvements se déroulant à proximité de la Terre, pour des durées très inférieures à une journée.

♢ Référentiel géocentrique

Référentiel centré sur la Terre est qui est considérée comme immobile. Adapté à l'étude du mouvement des satellites artificiels et de la Lune, par exemple.

♢ Référentiel héliocentrique

Référentiel centré sur le Soleil qui est considéré comme immobile. Adapté à l'étude du mouvement des planètes dans le système solaire, par exemple.

♢ Référentiel de Copernic

Référentiel centré sur le barycentre du système solaire et dont les axes du repère pointent vers trois étoiles très lointaines. Il est considéré comme galiléen en excellente approximation pour toute expérience humainement réalisable.

♢ Hypothèse du temps absolu

Hypothèse selon laquelle l'écoulement du temps est invariant par changement de référentiel. Cette hypothèse est raisonnable tant que les vitesses sont suffisamment petites par rapport à celle de la lumière dans le vide.

1.1.3 Au-delà de la mécanique classique

La relativité, qu'elle soit restreinte ou générale, n'est pas enseignée en CPGE et n'est exigible à aucun concours qui se conforme au programme officiel.

♢ Mécanique relativiste

- Branche de la mécanique où les principes de la relativité restreinte sont pris en compte.
- Adapté à la descrption de systèmes sans masse, où dont la vitesse est proche de celle de la lumière dans le vide.
- Le déterminisme y est toujours valable.

♢ Principes de la relativité restreinte

- Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens.
- La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens.

♢ Relativité générale

Vision modifiée de la gravitation qui n'est plus force, mais provoque une courbure de l'espace-temps en présence d'un objet massif. La gravitation ne peut être distinguée d'une accélération.

La mécanique quantique est abordée en CPGE, dans des cas très simples.

♢ Mécanique quantique

- Le système n'a pas d'état entièrement déterminé.
- L'état et l'évolution d'un système sont établis en termes de probabilité (de présence, de vitesse, d'énergie).
- Il existe plusieurs formulations pour cette mécanique (ondulatoire, matricielle) dont l'interprétation est parfois délicate, mais dont les résultats sont jusqu'ici systématiquement vérifiée avec une excellente précision.

1.2 Grandeurs cinématiques

♢ Position

La trajectoire d'un point P dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O est la courbe orientée que le point décrit au cours du temps. Elle est repérée par un vecteur : $\overrightarrow{OP}(t)$

♢ Vitesse

- $\boxed{\vec{v} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}}$
- Sa direction est tangente à la trajectoire dans $\mathcal{R}$. Son sens est celui du mouvement. Sa norme est la valeur de la vitesse instantanée à l'instant t.

♢ Accélération

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}$$

Mouvement	accéléré	ralenti	uniforme
$\vec{v}\cdot\vec{a}$	>0	<0	$=0$

Un mouvement uniforme peut se produire avec une accélération non nulle ! En effet, $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ n'implique pas nécessairement $\vec{a}=\vec{0}$.

1.3 Systèmes de coordonnées

1.3.1 Coordonnées cartésiennes

♢ Repère cartésien

- Trois vecteurs $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$ définissent chacun une direction de l'espace.
- Ils ont tous une norme unité : $\|\vec{u_x}\| = \|\vec{u_y}\| = \|\vec{u_z}\| = 1$
- Ils sont orthogonaux deux à deux : $\vec{u_x}\cdot\vec{u_y} = \vec{u_y}\cdot\vec{u_z} = \vec{u_z}\cdot\vec{u_x} = 0$
- Ils forment un repère **fixe** orienté dans le sens direct : $\vec{u_x}\wedge\vec{u_y} = \vec{u_z}$ (et permutations circulaires)

♠ Grandeurs cinématiques

- Position : $\boxed{\overrightarrow{OP} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}}$
- Variation infinitésimale de position : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'} = \mathrm{d}x\,\vec{u_x} + \mathrm{d}y\,\vec{u_y} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}}$
- Vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y} + \dot{z}\,\vec{u_z}}$
- Accélération : $\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y} + \ddot{z}\,\vec{u_z}}$

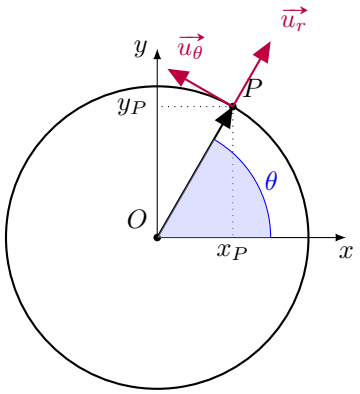
1.3.2 Coordonnées polaires

♢ Repère polaire

- Système de coordonnées **dans un plan**.
- On attache au point P un repère orthonormé **mobile** $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ qui évolue avec lui.
- Les vecteurs de base sont unitaires :

$$\|\vec{u_r}\| = \|\vec{u_\theta}\| = 1$$

- Ils sont orthogonaux entre eux.



♠ Relations de passage

Relations entre les coordonnées

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

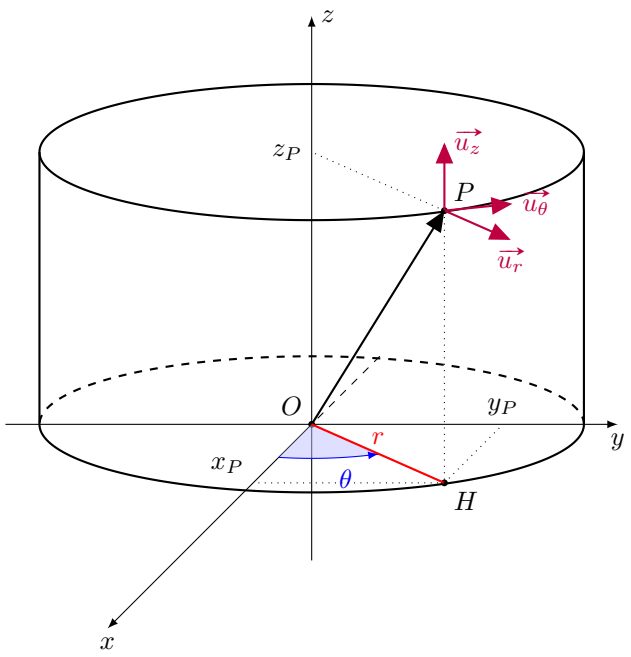
Relations entre les vecteurs de base

$$\begin{aligned} \vec{u_r} &= \cos(\theta)\,\vec{u_x} + \sin(\theta)\,\vec{u_y} \\ \vec{u_\theta} &= -\sin(\theta)\,\vec{u_x} + \cos(\theta)\,\vec{u_y} \end{aligned}$$

1.3.3 Coordonnées cylindriques

♢ Repère cylindrique

- On attache au point P un repère orthonormé **mobile** $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ qui évolue avec lui.
- Seul le vecteur $\vec{u_z}$ a une direction fixe dans $\mathcal{R}$.
- Les vecteurs de base sont unitaires : $\|\vec{u_r}\| = \|\vec{u_\theta}\| = \|\vec{u_z}\| = 1$
- Ils sont orthogonaux deux à deux.
- Ils forment un repère direct : $\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_z}$ (et permutations circulaires)



♢ Coordonnées cylindriques

Coordonnée	Interprétation	Vecteur associé	Nom	Interprétation
r	distance à l'**axe de rotation**	$\vec{u_r}$	radial	indique la direction de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'origine du repère
θ	position angulaire	$\vec{u_\theta}$	orthoradial	indique la direction de la rotation de P autour de l'axe vertical (fixe)
z	altitude	$\vec{u_z}$	vertical	il est fixe dans $\mathcal{R}$ et détermine l'axe de rotation

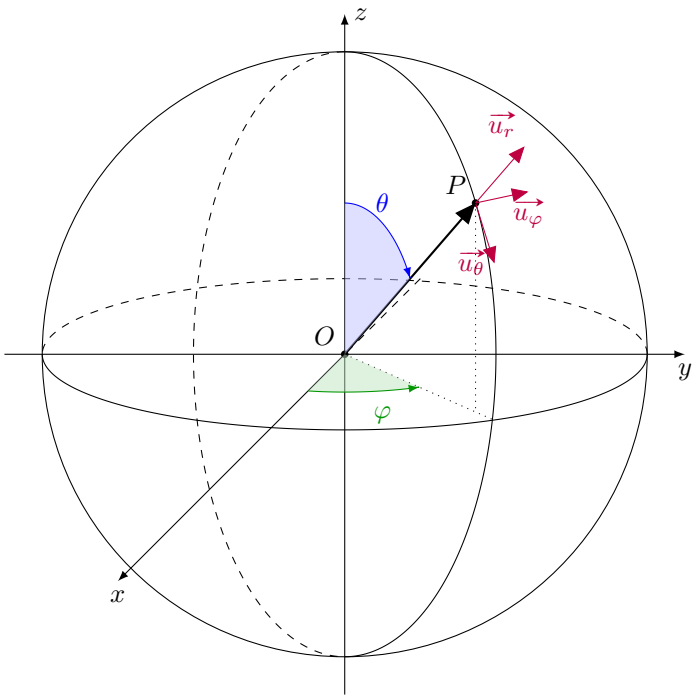
♠ Grandeurs cinématiques

- Position : $\boxed{\overrightarrow{OP} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}}$
- Variation infinitésimale de position : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'} = \mathrm{d}r\,\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}}$
- Vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}}$
- Accélération : $\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}}$

1.3.4 Coordonnées sphériques

♢ Repère sphérique

- On attache au point P un repère orthonormé **mobile** $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ qui évolue avec lui.
- Les vecteurs de base sont unitaires : $\|\vec{u_r}\| = \|\vec{u_\theta}\| = \|\vec{u_\phi}\| = 1$
- Ils sont orthogonaux deux à deux.
- Ils forment un repère direct : $\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_\varphi}$ (et permutations circulaires)



$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)$$
$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$z = \rho \cos(\theta)$$

♢ Coordonnées sphériques

Coordonnée	Interprétation	Vecteur associé	Nom	Interprétation
ρ	distance à l'origine	$\vec{u_r}$	radial	indique la direction de $\overrightarrow{OP}$ par rapport à l'origine du repère
θ	colatitude	$\vec{u_\theta}$	orthoradial	indique l'écartement angulaire par rapport à l'axe Nord-Sud (déplacement sur un méridien)
φ	longitude	$\vec{u_\varphi}$	azimuthal	indique l'écartement angulaire par rapport à une référence autour de l'axe Nord-Sud (déplacement sur un parallèle)

♠ Grandeurs cinématiques

- Position : $\boxed{\overrightarrow{OP} = \rho\,\vec{u_r}}$
- Déplacement infinitésimal : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'} = \mathrm{d}\rho\,\vec{u_r} + \rho\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u_\theta} + \rho\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u_\varphi}}$
- Vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u_r} + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \rho\sin(\theta)\,\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}}$
- Accélération $\vec{a}$: n'est jamais calculé dans le cas général, à moins d'y être contraint et forcé.

1.4 MOUVEMENTS PARTICULIERS

♢ Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Le vecteur accélération est colinéaire au vecteur vitesse.

♠ Mouvement à vecteur accélération constant

Soit un mobile dans un référentiel $\mathcal{R}$ (origine O) doté d'une vitesse initiale $\vec{v_0}$ et d'une position initiale $\overrightarrow{OP_0}$.

$$\vec{v} = \vec{a}\,t + \vec{v_0} \qquad \overrightarrow{OP} = \vec{a}\,\frac{t^2}{2} + \vec{v_0}\,t + \overrightarrow{OP_0}$$

$\vec{a}$: accélération constante	$[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$
$\vec{v}$: vitesse	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
$\overrightarrow{OP}$: position	$[\mathrm{m}]$
t : variable temporelle	$[\mathrm{s}]$

♠ Mouvement circulaire uniforme

Soit un mobile dans un référentiel $\mathcal{R}$ (origine O) se mouvant sur un cercle de rayon R à la vitesse angulaire ω constante. On étudie la trajectoire dans la base polaire.

$$\theta = \omega\,t$$
$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = -R\,\omega^2\,\vec{u_r} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{u_r}$$

$\vec{a}$: vecteur accélération	$[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$
R : rayon de la trajectoire	$[\mathrm{m}]$
$\omega \equiv \dot{\theta}$: vitesse angulaire	$[\mathrm{rad\cdot s^{-1}}]$
$\vec{v}$: vecteur vitesse	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
θ : position angulaire	$[\mathrm{rad}]$

Le vecteur vitesse est **tangent au cercle**. Le vecteur accélération est **centripète** (dirigé vers le centre de la trajectoire).

♠ Mouvement circulaire non uniforme

Soit un mobile M dans un référentiel $\mathcal{R}$ (origine O) se mouvant sur un cercle de rayon R. On étudie la trajectoire dans la base polaire.

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\,\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$\vec{a}$: vecteur accélération	$[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$
R : rayon de la trajectoire	$[\mathrm{m}]$
$\omega \equiv \dot{\theta}$: vitesse angulaire	$[\mathrm{rad\cdot s^{-1}}]$
$\vec{v}$: vecteur vitesse	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
θ : position angulaire	$[\mathrm{rad}]$

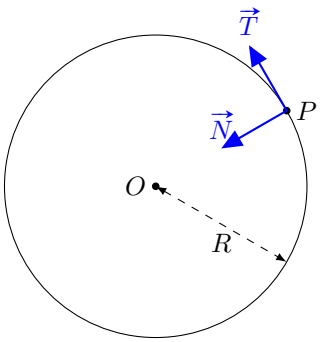
Le vecteur accélération a une composante **centripète** (dirigé vers le centre de la trajectoire) et une composante **orthoradiale** qui modifie la valeur de la vitesse.

♢ Repère de Frenet

Repère tournant associé au système $(M, \vec{N}, \vec{T})$ et tel que $\vec{N} = -\vec{u_r}$ et $\vec{T} = \vec{u_\theta}$. Il est souvent utilisé pour l'étude des mouvements circulaires (satellites en mécanique céleste).

En notant $\vec{v} = v\,\vec{T}$ on détermine l'accélération :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\vec{N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T}}$$



Chapitre M2 Dynamique du point

2.1 Interactions et forces

♢ Force

C'est une interaction qui modifie le mouvement d'un objet (ou le déforme). La valeur de la vitesse est changée, ou bien sa direction, ou les deux. Elle est la manifestation d'une interaction entre deux systèmes. **Une force est invariante par changement de référentiel galiléen**.

♢ Caractériser une force

Une force est représentée par un **vecteur** (direction, sens, norme) et on doit préciser son **point d'application**.

♢ Résultante des forces

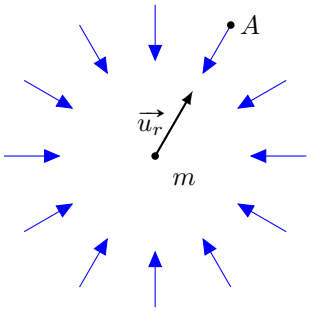
C'est la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur le système. Elle donne l'action globale subie par le système.

♣ Champ gravitationnel créé par un objet massif et carte de champ

Un objet matériel en O doté d'une masse m crée dans l'espace un champ **gravitationnel** auquel seront sensibles tous les objets dotés d'une masse.

$$\vec{g}(A) = -\frac{G\,m}{r^2}\vec{u_r}$$

$\vec{g}(A)$: champ gravitationnel au point A [$\mathrm{N\cdot kg^{-1}}$]
$G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot kg^{-2}\cdot m^{-2}}$
m : masse de l'objet créant le champ [kg]
$r = OA$: distance entre A et l'objet massif [m]
$\vec{u_r}$: vecteur unitaire radial



L'orientation du champ dans l'espace est toujours dirigé **vers la masse** à son origine car $m > 0$. Si on place une autre masse m_A en A, celle-ci subit une force gravitationnelle :

$$\vec{F}(A) = m_A\,\vec{g}(A)$$

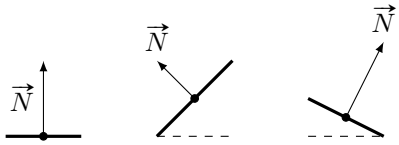
La **norme** est donnée par la **loi universelle de gravitation de Newton** :

$$F(A) = \frac{G\,m\,m_A}{r^2}$$

Remarque : La théorie de la relativité générale donne une autre interprétation de la gravitation dont les effets sont de courber l'espace-temps. La trajectoire des objets n'est alors plus la conséquence d'une force, mais le fait qu'ils suivent cette déformation.

♢ Réaction normale d'un support

C'est une interaction de contact **répulsive** qui traduit le fait que deux objets ne peuvent pas s'interpénétrer. Elle est **perpendiculaire** au support.

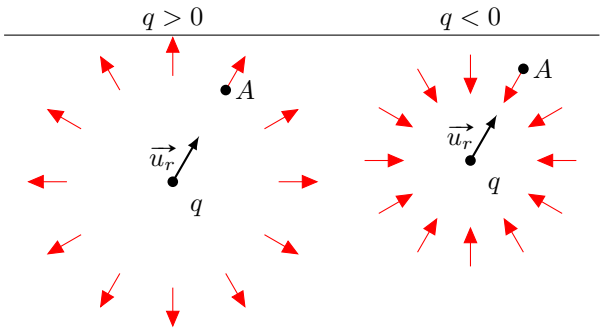


♣ Champ électrique créé par une charge électrique

Une charge électrique q **immobile** en O crée dans l'espace un champ **électrostatique** auquel seront sensibles d'autres particules chargées.

$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\vec{u_r}$$

$\vec{E}(A)$: champ électrique au point A [$\mathrm{V\cdot m^{-1}}$]
q : charge électrique [C]
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot C^{-2}\cdot m^2}$
$r = OA$: distance entre A et la charge [m]
$\vec{u_r}$: vecteur radial depuis l'origine du champ



L'orientation du champ dans l'espace **dépend du signe** de la charge qui en est à l'origine. Si on place une autre charge q_A en A, celle-ci subit une force électrostatique qui dépend de son propre signe :

$$\vec{F}(A) = q_A\,\vec{E}(A)$$

La **norme** est donnée par la **loi de Coulomb** :

$$F(A) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{|q\,q_A|}{r^2}$$

♠ Tension électrique et champ électrique

Un champ électrique est associé à une différence de potentiel dans une zone de l'espace. Il est dirigé vers les zones de potentiel faible, donc depuis les charges positives vers les négatives.

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\vec{u_x}$$

$\vec{E}$: champ électrique [$\mathrm{V\cdot m^{-1}}$]
V : potentiel électrique [V]
x : coordonnée spatiale (cas 1D) [m]

♣ Force de frottement

- Frottements solides : force constante, proportionnelle au poids, dépend des matériaux en contact, orientée dans le sens opposé à la vitesse de glissement.
- Frottements fluides : force qui dépend de la vitesse relative du système par rapport au fluide.
  - frottement visqueux : $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$ avec α qui dépend de la viscosité du fluide et de la géométrie du système ;
  - frottement turbulent : $\vec{F} = -\frac{C_x\,\rho\,S\,v}{2}\,\vec{v}$ avec ρ la masse volumique du fluide, S la section du système, C_x un coefficient empirique.

♣ Force de rappel d'un ressort — Loi de Hooke

$$\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u_x}$$

$\vec{F}$: force de rappel [N]
k : constante de raideur [$\mathrm{N\cdot m^{-1}}$]
ℓ : longueur en étirement [m]
ℓ_0 : longueur au repos [m]
$\vec{u_x}$: direction de l'allongement du ressort

♣ Poussée d'Archimède

Un corps plongé dans un fluide reçoit une poussée opposée (en sens) au champ de gravitation et égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps immergé.

$$\vec{\mathcal{A}} = -\rho\,V\,\vec{g}$$

$\vec{\mathcal{A}}$: poussée d'Archimède [N]
ρ : masse volumique **du fluide** [$\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$]
V : volume immergé du corps [$\mathrm{m^3}$]
$\vec{g}$: champ de pesanteur [$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$]

2.2 Masse et quantité de mouvement

♢ Masse

- Propriété dont sont dotés tous les corps matériels.
- Elle se manifeste par la propension à attirer les autres objets ayant une masse (masse grave) ou par la résistance qu'oppose l'objet à la modification de son mouvement (masse inertielle).
- Les travaux d'Einstein ont permis de montrer qu'il s'agit d'une forme d'énergie, donc sujette à conversion.

♢ Centre de masse

Dans un repère d'origine O, soit un ensemble de points matériels P_i dotés d'une masse m_i. Le centre de masse G est donné par :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}$$

m_i : masse d'un point matériel [kg]
$m = \sum_i m_i$: masse totale [kg]
G : centre d'inertie
$\overrightarrow{OP_i}$: position du point i [m]

♠ Vitesse du centre de masse

La vitesse du centre de masse d'un ensemble de points matériels est donnée par : $\boxed{\vec{v_G} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v_i}}$

♢ Quantité de mouvement

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, la quantité de mouvement d'un point matériel est : $\boxed{\vec{p} \equiv m\,\vec{v}}$

C'est une grandeur **additive** : la quantité de mouvement totale est la somme des quantités de mouvement de tous les poins qui constituent le système.

2.3 Principes fondamentaux de la dynamique

2.3.1 Énoncé des lois de Newton

♣ Principe d'inertie — 1ère loi de Newton

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, une particule qui n'est soumise à aucune interaction est au repos ou bien a une trajectoire rectiligne et uniforme. Et réciproquement.

♣ Principe fondamental de la dynamique — 2ème loi de Newton

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la modification du mouvement d'une particule est causée par les interactions auxquelles elle est soumise :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F_i}$$

$\vec{p}$: quantité de mouvement [kg · m · s^{-1}]
t : variable temporelle [s]
$\vec{F_i}$: force exercée sur le système [N]

Dans le cas, assez usuel, où la masse m est constante : $\boxed{m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}}$

♣ Principe d'action-réaction — 3ème loi de Newton

Deux corps en interaction exercent chacun sur l'autre la même force, de même norme mais d'orientations opposées. Ce principe est valable dans tous les référentiels car les forces sont invariantes.

♠ Conservation de la quantité de mouvement

Pour un système isolé, la quantité de mouvement est **conservée**.

2.3.2 Trajectoire balistique

Les notations introduites dans la position du problème ne sont plus rappelées par la suite.

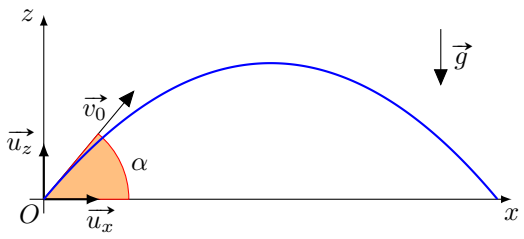
♢ Position du problème

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, un objet ponctuel de masse m est doté d'une vitesse initiale $\vec{v_0}$ au point d'origine du repère O. Il est soumis uniquement à son poids $m\,\vec{g}$.

Par le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

C'est un mouvement à accélération constante.



♠ Équations horaires du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} &= v_0\,\cos(\alpha) \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= -g\,t + v_0\,\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= v_0\,\cos(\alpha)\,t \\ y &= 0 \\ z &= -\dfrac{g\,t^2}{2} + v_0\,\sin(\alpha)\,t + h \end{cases}$$

♠ Équation de la trajectoire

La trajectoire d'un objet en chute libre est une **parabole** : $\boxed{z = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2(\alpha)}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x + h}$

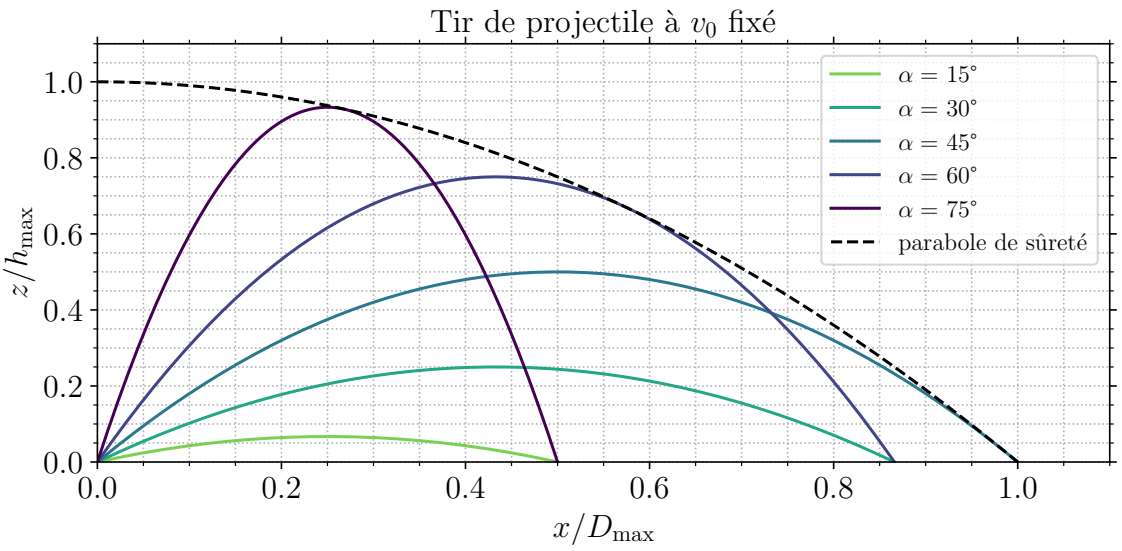
♠ Flèche de la trajectoire

C'est le point $S(x_S, z_S)$ le plus élevé de la trajectoire : $\boxed{x_S = \dfrac{v_0^2\,\sin(2\,\alpha)}{2\,g}}$ $\boxed{z_S = \dfrac{v_0^2\,\sin^2(\alpha)}{2\,g}}$

♠ Portée

C'est la distance horizontale parcourue pour retrouver l'altitude initiale : $\boxed{D = \dfrac{v_0^2\,\sin(2\,\alpha)}{g}}$

On remarque que la portée la plus longue est obtenue pour un angle de tir de $45°$.



2.3.3 Chute verticale freinée

♢ Position du problème et bilan des forces

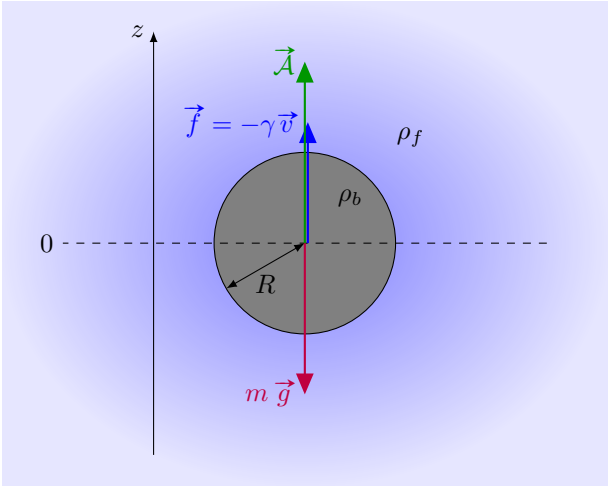
Dans un référentiel galiléen, on considère la chute d'une sphère homogène de rayon R, de masse volumique ρ_b plongée dans un fluide de masse volumique ρ_f dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. Elle a une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_z}$ verticale avec v_0 algébrique.

La sphère est soumise à son poids, la poussée d'Archimède et une force de frottement fluide. La force de frottement est modélisée par la formule de Stokes (frottement visqueux pour une sphère) :

$$\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$$

Par le principe fondamental de la dynamique :

$$m\,\vec{a} = \vec{\mathcal{A}} + \vec{f} + m\,\vec{g}$$

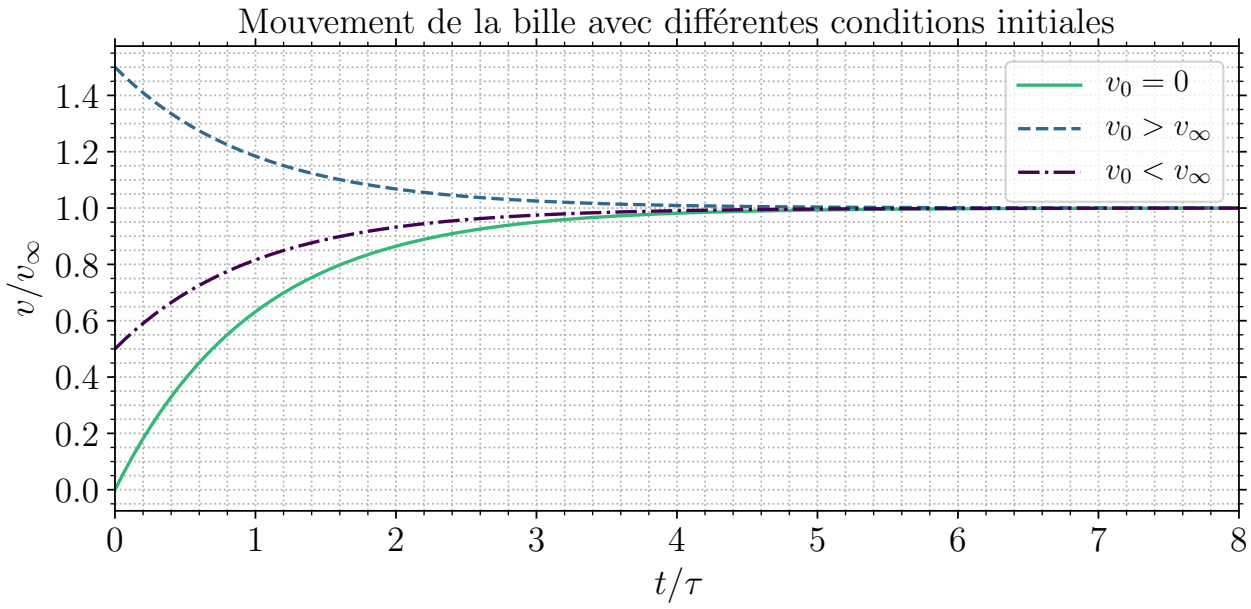


♠ Évolution de la vitesse

Équation différentielle	$\ddot{z} + \dfrac{\dot{z}}{\tau} = \dfrac{v_\infty}{\tau}$
Temps caractéristique	$\tau = \dfrac{2\,\rho_b\,R^2}{9\,\eta}$
Vitesse limite	$v_\infty = \dfrac{2\,R^2\,g\,(\rho_f - \rho_b)}{9\,\eta}$
Solution	$\dot{z} = v_\infty + (v_0 - v_\infty)\,\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

♢ Description du mouvement

- La vitesse est limitée en raison des **frottements**.
- Le mouvement connaît deux régimes : un **transitoire** et un **permanent**.
- La durée du régime transitoire est d'environ 5 à $7\,\tau$ (ordre de grandeur).



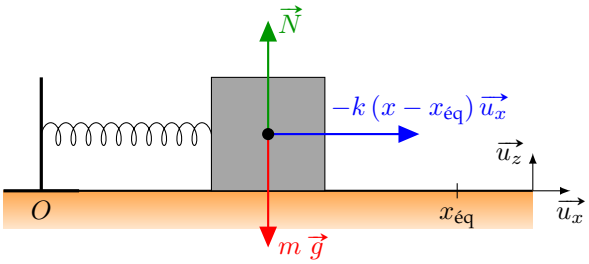
2.3.4 Système masse-ressort

♢ Position du problème

Dans un référentiel galiléen, on considère un ressort dont la longueur coïncide avec l'abscisse x selon son axe $\overrightarrow{u_x}$. Il est initialement écarté de sa position d'équilibre : $x_0 \neq x_{\text{éq}}$ et relâché avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ (avec v_0 algébrique). On suppose que le ressort glisse sur un plan horizontal sans frottement.

Selon le principe fondamental de la dynamique :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{N} - k\,(x - x_{\text{éq}})\,\overrightarrow{u_x}$$

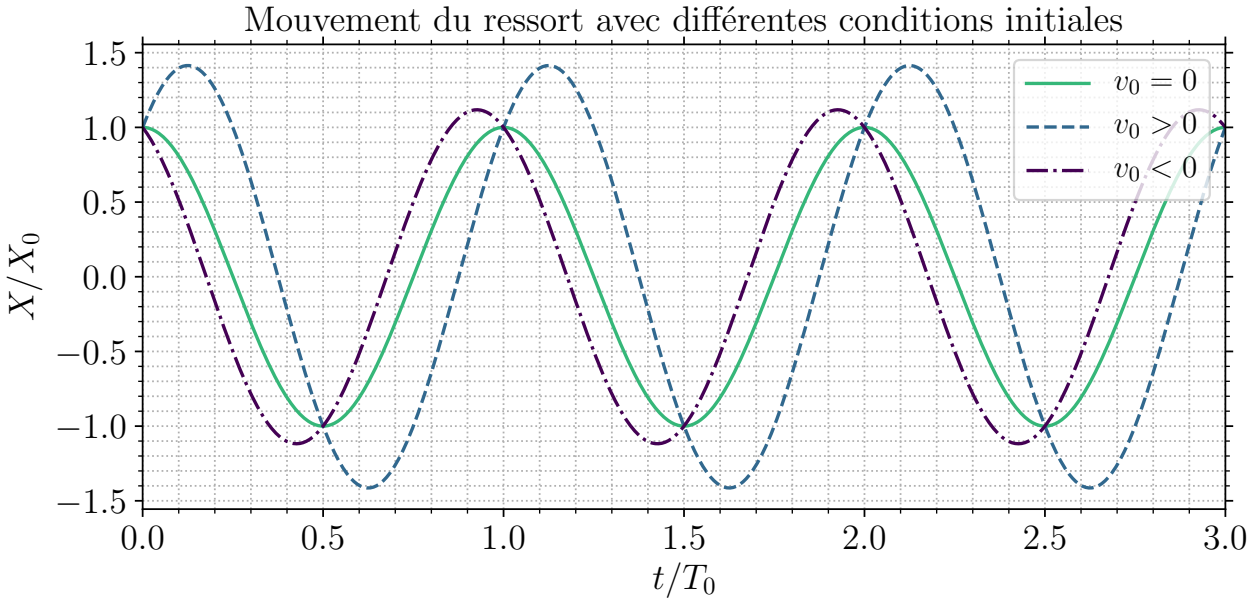


♠ Évolution de la position

Écartement à l'équilibre	$X(t) \equiv x(t) - x_{\text{éq}}$
Équation différentielle	$\ddot{X} + \omega_0^2\,X = 0$
Période	$T_0 = \dfrac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
Conditions initiales	$X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = v_0$
Solution	$X(t) = X_0\,\cos(\omega_0\,t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\,\sin(\omega_0\,t)$

♢ Description du mouvement du ressort

- L'équation du mouvement est celle de **l'oscillateur harmonique**.
- Le mouvement est **périodique**. Le ressort oscille **autour de sa position d'équilibre**.
- La période dépend des caractéristiques du ressort et de la masse du système.
- En cas de vitesse initiale non nulle, on observe une avance ou un retard (selon le signe de v_0) et une amplitude plus élevée du mouvement.



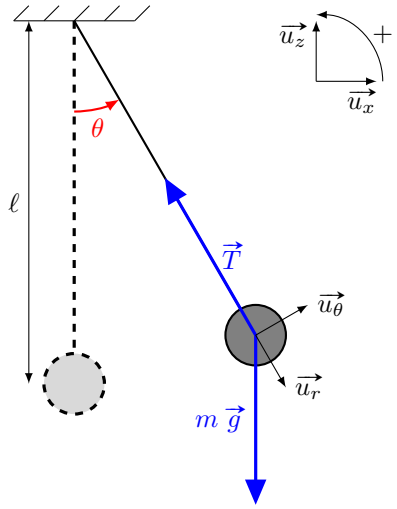
2.3.5 Pendule simple

♢ Position du problème

Dans un référentiel galiléen, on considère une bille ponctuelle attachée à un fil inextensible indéformable de longueur ℓ, dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. La bille est soumise à son poids et à la tension du fil uniquement. Selon le principe fondamental de la dynamique :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{T}$$

On considère qu'elle est lâchée avec un écartement initial θ_0 et une vitesse angulaire initiale Ω_0.

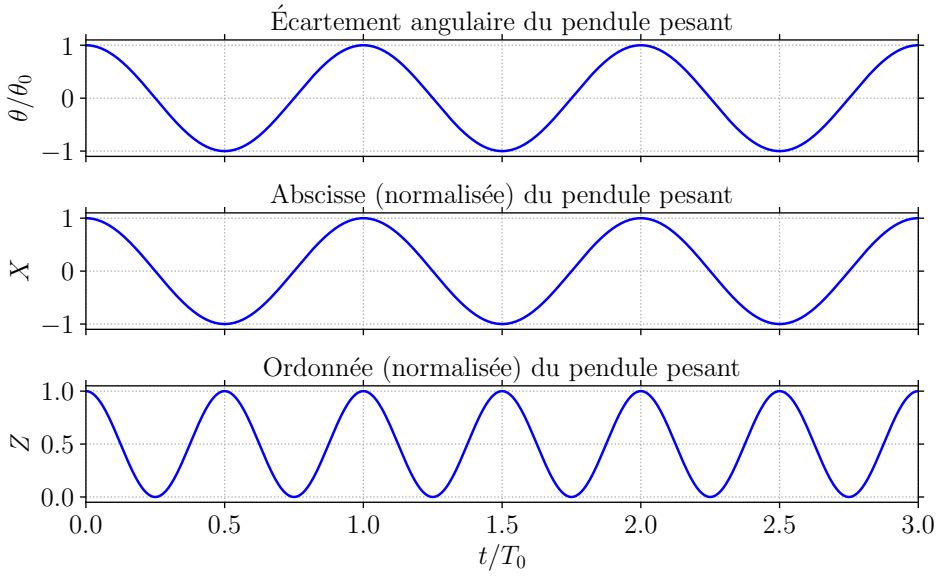


♠ Évolution de la position angulaire sous approximation des petits angles

Équation différentielle	$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$
Période	$T_0 = \dfrac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$
Conditions initiales	$\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \Omega_0$
Solution	$\theta(t) = \theta_0\,\cos(\omega_0\,t) + \dfrac{\Omega_0}{\omega_0}\,\sin(\omega_0\,t)$

♢ Description du mouvement

- Dans l'approximation des petits angles, on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique.
- Le mouvement est **périodique**.
- La période dépend de la longueur du fil et de l'intensité de la pesanteur uniquement.



2.3.6 Particule chargée dans un champ électrique uniforme

♢ Force de Lorentz (contribution électrique)

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

$\vec{F}$: force de Lorentz	[N]
q : charge électrique	[C]
$\vec{E}$: champ électrostatique	$[\mathrm{V\cdot m^{-1}}]$

♠ Équations horaires du mouvement

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen on étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dotée d'une vitesse initiale $\vec{v_0}$ à l'origine du repère. Elle est plongée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme.

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$
$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\,t + \vec{v_0}$$
$$\overrightarrow{OP} = \frac{q}{m}\vec{E}\,\frac{t^2}{2} + \vec{v_0}\,t$$

C'est un cas particulier du mouvement avec accélération constante. Déjà vu.

2.3.7 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

♢ Force de Lorentz (contribution magnétique)

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, c'est la force que subit une particule chargée placée dans un champ magnétique uniforme.

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{F}$: force de Lorentz	[N]
q : charge électrique	[C]
$\vec{v}$: vitesse	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
$\vec{B}$: champ magnétique	[T]

Remarque : une force ne devrait pas dépendre du référentiel choisi. C'est le cas ici car le champ électromagnétique ne s'exprime correctement que dans une approche relativiste (donc totalement hors programme en CPGÉ) uniquement. Un changement de référentiel induit une modification de la description du champ lui-même.

♠ Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme

- Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, on suppose que la vitesse initiale $\vec{v_0}$ de la particule est orthogonale au champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$ supposé uniforme.
- On montre que le mouvement de la particule est circulaire et uniforme.
- La particule « s'enroule » autour de la direction du champ magnétique.

$$\dot{\theta} = -\frac{q\,B}{m} \qquad R = \frac{m\,v_0}{q\,B}$$

$\dot{\theta}$: vitesse angulaire	$[\mathrm{rad\cdot s^{-1}}]$
q : charge électrique	[C]
B : champ magnétique	[T]
m : masse de la particule	[kg]
R : rayon de la trajectoire	[m]
v_0 : vitesse initiale	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$

Chapitre M3 Énergétique du point

3.1 Travail d'une force

♢ Déplacement élémentaire

- On note $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \vec{v}\ \mathrm{d}t$ le déplacement élémentaire du système en une durée $\mathrm{d}t \to 0$ infinitésimale, où l'on peut considérer la vitesse $\vec{v}$ pratiquement constante.
- L'expression du déplacement élémentaire dépend du système de coordonnées : cartésien, cylindrique, polaire, sphérique (→ *chapitre « M1 Cinématique »*).

♢ Travail d'une force

C'est un **échange** d'énergie dû à un déplacement, à une déformation ou à une modification interne d'un système sous l'effet d'une action extérieure.

♠ Expression du travail d'une force

On considère un système transporté d'un point A à un point B et soumis à une force $\vec{F}$ qui en toute généralité est susceptible de changer d'orientation ou de valeur au cours du trajet.

Travail infinitésimal	$\delta W \equiv \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t$
Travail global	$W = \displaystyle\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$
Cas force constante (**orientation** et valeur)	$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

♠ Puissance mécanique reçue

La puissance (mécanique) correspond au travail échangé par unité de temps.

$$\mathcal{P} \equiv \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$\mathcal{P}$: puissance reçue	[W]
$\vec{F}$: force exercée sur le système	[N]
$\vec{v}$: vitesse	$[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$

♢ Propriétés du travail

- Le travail reçu est **algébrique**. Il est **reçu** si $W > 0$, sinon il est cédé à l'extérieur.
- Le travail d'une somme de forces est la somme des travaux de chaque force.
- Le travail dépend *a priori* du référentiel choisi et du chemin suivi.

♢ Interprétation du travail d'une force

Signe	Signification	Conséquence
$W > 0$	force motrice	contribue à augmenter la valeur de la vitesse
$W = 0$	ne travaille pas	ne change pas la valeur de la vitesse
$W < 0$	force résistante	contribue à diminuer la valeur de la vitesse

3.2 Champ de forces conservatives

♠ Travail du poids

Le travail du poids ne dépend que de la différence d'altitude entre le départ et l'arrivée du trajet.

$$W_{AB} = -m\,g\,(y_B - y_A)$$

W_{AB} : travail reçu	[J]
m : masse du système	[kg]
g : intensité de la pesanteur	$[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$
y_A : altitude au point A	[m]
y_B : altitude au point B	[m]

♠ Travail de la force électrostatique

Le travail de la force électrostatique ne dépend que de la différence de potentiel entre le départ et l'arrivée.

$$W_{AB} = -q\,(V_B - V_A)$$

W_{AB} : travail reçu	[J]
q : charge électrique	[C]
V_A : potentiel électrique au point A	[V]
V_B : potentiel électrique au point B	[V]

♢ Forces conservatives et non conservatives

Une force conservative est telle que son travail ne dépend pas du chemin suivi entre le départ et l'arrivée. Dans le cas contraire, on parle de force non conservative.

- Par « chemin suivi », on envisage les différentes trajectoires possibles entre le départ et l'arrivée.
- Typiquement, si le travail dépend explicitement de la durée du trajet, la force est non conservative.
- *Méthode des travaux virtuels* pour montrer qu'une force est conservative :
  1. on calcule le travail sur un déplacement élémentaire quelconque
  2. on vérifie s'il est possible d'intégrer pour obtenir le travail sans avoir connaissance de la trajectoire suivie entre le départ et l'arrivée
  3. si le travail ne dépend que de coordonnées du départ et de l'arrivée, mais pas de la trajectoire elle-même, on a une force conservative

♢ Énergie potentielle

Si une force est conservative, on définit une énergie potentielle E_p à partir du travail :

$$\mathrm{d}E_p \equiv -\delta W \qquad \boxed{\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}}$$

- Vu sa définition, l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près et peut avoir un signe quelconque *a priori*.
- Seules les **variations** d'énergie potentielle ont un sens physique.

♢ Autre définition d'une force

- S'il existe une énergie potentielle associée à un phénomène, on dit que la force **dérive de ce potentiel**.
- La force pointe dans la direction où l'énergie potentielle **décroît**.
- Dans un système cartésien à 1 dimension où x est une position (homogène à une longueur) on écrit :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\,\vec{u_x}}$$

3.3 Différentes formes d'énergie

♢ Énergie

Quantité physique qui peut être reconnue sous différentes formes : cinétique, thermique, potentielle, de masse, lumineuse. Tout phénomène physique est associé à une forme d'énergie dont le calcul est plus ou moins compliqué, et à un tranfert ou une conversion d'énergie.

♣ Principe de conservation de l'énergie (version provisoire → *chapitres « Thermodynamique »*)

L'énergie ne peut être créée ou détruite. Tout phénomène physique est une **conversion** d'une forme d'énergie en une autre, ou bien un **échange** d'énergie avec un autre système.

♢ Énergie cinétique

Dans un référentiel donné, c'est la forme d'énergie qu'un système possède du fait de son mouvement.

$$E_\mathrm{c} \equiv \frac{m\,v^2}{2}$$

E_c : énergie cinétique	[J]
m : masse du système	[kg]
v : valeur de la vitesse	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$

♠ Énergie potentielle de pesanteur

C'est la forme d'énergie associée à une position en altitude, dans un champ de pesanteur considéré uniforme. L'altitude est faible par rapport au rayon de la Terre.

$$E_\mathrm{pp} = m\,g\,z + E_0$$

E_pp : énergie potentielle de pesanteur	[J]
m : masse	[kg]
g : intensité de la pesanteur	$[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$
z : altitude	[m]
E_0 : énergie à altitude nulle	[J]

♠ Énergie potentielle électrostatique

C'est l'énergie associée à une particule chargée placée dans un champ électrique.

$$E_\mathrm{pé} = q\,V + E_0$$

$E_\mathrm{pé}$: énergie potentielle électrique	[J]
q : charge électrique	[C]
V : potentiel électrique	[V]
E_0 : énergie de référence	[V]

♠ Énergie élastique d'un ressort

Lorsqu'un ressort est étiré ou compressé, il emmagasine de l'énergie.

$$E_\mathrm{pr} = \frac{k\,(\Delta\ell)^2}{2}$$

E_pr : énergie potentielle	[J]
k : raideur du ressort	$[\mathrm{N\cdot m^{-1}}]$
$\Delta\ell$: élongation du ressort	[m]

♢ Énergie mécanique

$$E_\mathrm{m} \equiv E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}$$

E_m : énergie mécanique	[J]
E_c : énergie cinétique	[J]
E_p : énergie potentielle	[J]

Il faut tenir compte de toutes les énergies potentielles en présence.

3.4 Théorèmes de l'énergie

♣ Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique sur un trajet égale la somme des travaux des forces exercées sur le système.

$$\Delta E_\mathrm{c} = \frac{m\,v_f^2}{2} - \frac{m\,v_i^2}{2} = \sum_i W(\vec{F_i})$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

ΔE_c : variation d'énergie cinétique	[J]
m : masse	[kg]
v_i : vitesse initiale	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
v_f : vitesse finale	$[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
$W(\vec{F_i})$: travail de la force $\vec{F_i}$	[J]
t : variable temporelle	[s]
$\mathcal{P}_i$: puissance associée à la force $\vec{F_i}$	[W]

♣ Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, au cours du mouvement la **variation d'énergie mécanique** correspond au travail des forces $\overrightarrow{F_\mathrm{nc}}$ **non conservatives** : $\boxed{\Delta E_\mathrm{m} = W(\overrightarrow{F_\mathrm{nc}})}$

Ce théorème est une conséquence du théorème de l'énergie cinétique. Il est équivalent à ce dernier.

♣ Corollaire du théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique est **constante** si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou ne travaillant pas.

3.5 Équilibre et stabilité

3.5.1 Mouvement conservatif et formes de potentiel

♢ Mouvement conservatif

Dans un référentiel galiléen, un mouvement est dit conservatif si le système étudié n'est soumis qu'à des forces conservatives, donc dérivant d'un potentiel.

♢ Puits de potentiel

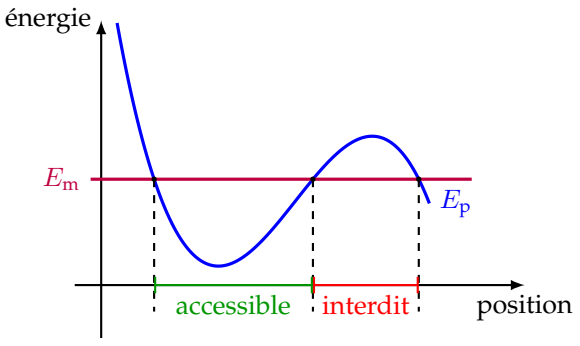
- C'est une région de l'espace voisine d'un **minimum** (possiblement local) d'énergie potentielle.
- Si l'énergie mécanique est supérieure au minimum d'énergie potentielle, un mouvement est possible et a lieu.

♢ Barrière de potentiel

- C'est une région de l'espace voisine d'un **maximum** ou d'une divergence d'énergie potentielle.
- Si l'énergie mécanique est inférieure à ce maximum d'énergie potentielle, il est **impossible** de franchir la barrière en mécanique classique.

♠ Zones accessibles en fonction de l'énergie mécanique

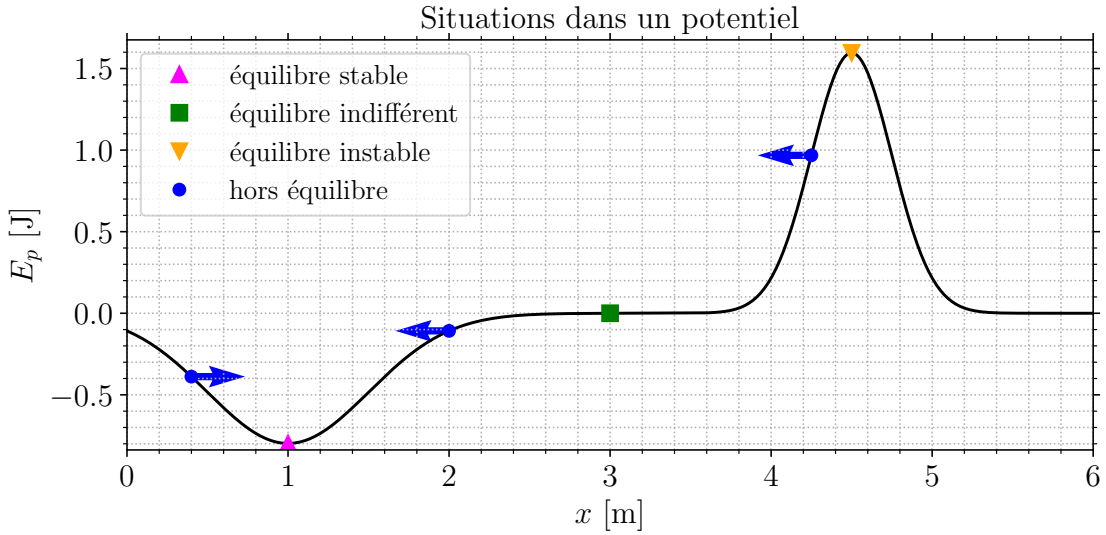
- Dans un intervalle (de position) **fermé** où $E_\mathrm{p} < E_\mathrm{m}$, le mouvement est **confiné** entre les bornes de l'intervalle.
- Aux niveau des bornes d'un intervalle fermé accessible, la vitesse est **nulle** et le système fait « demi-tour ».
- Une zone où $E_\mathrm{p} > E_\mathrm{m}$ est **inaccessible** en mécanique classique.
- Dans une zone où la position maximale n'est pas bornée, aucun mouvement périodique n'est possible.



♣ Notion d'équilibre

L'équilibre est réalisé si l'on atteint un **extremum** de l'énergie potentielle.

Type d'équilibre	Nature de l'extremum	Condition équivalente (1D)	Conséquence d'éloignement
stable	minimum	$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right\|_{x_\text{éq}} > 0$	une force ramène le système vers sa position d'équilibre
instable	maximum	$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right\|_{x_\text{éq}} < 0$	une force éloigne le système de sa position d'équilibre
indifférent	indifférent	$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right\|_{x_\text{éq}} = 0$	aucune force n'apparaît



3.5.2 Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

♠ Approximation locale par un potentiel harmonique

Dans un référentiel galiléen pour un système soumis à un champ de forces conservatives, on note $x_\text{éq}$ la position d'équilibre du système. L'énergie potentielle est développée en série de Taylor jusqu'au second ordre au voisinage de la position d'équilibre :

$$E_\mathrm{p} \approx E_0 + \frac{k}{2}(x - x_\text{éq})^2$$

E_p : énergie potentielle	[J]
E_0 : valeur de l'énergie en $x = x_\text{éq}$	[J]
x : coordonnée spatiale	[m]
$x_\text{éq}$: position d'équilibre	[m]
$k \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right\|_{x_\text{éq}}$	[J · m^{-2}]

♠ Mouvement au voisinage de l'équilibre

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,(x - x_\text{éq}) = 0$$

$$x(t) = x_\text{éq} + A\,\cos\left(\omega_0\,t + \varphi\right)$$

$\ddot{x}$: accélération	[m · s^{-2}]
x : position	[m]
$x_\text{éq}$: position d'équilibre	[m]
$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre	[rad · s^{-1}]
k : raideur du système	[J · m^{-2}]
m : masse du système	[kg]