Chapitre 0 – Analyse dimensionnelle

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
→ Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^\alpha B^\beta C^\gamma$ par analyse dimensionnelle.

Questions de cours

→ Indiquer les sept dimensions et unités du système international (nom et symbole).
→ Déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur à partir d'une expression simple.
→ Vérifier l'homogénéité d'une relation simple.

Documents

Document 1 – Le Système international

Dimension		**Unité S.I.**		**Constante associée**
Temps	T	seconde	s	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$: fréquence de la transition hyperfine du césium 133.
Longueur	L	mètre	m	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$: vitesse de la lumière dans le vide, *seconde*.
Masse	M	kilogramme	kg	$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$: constante de Planck, *mètre, seconde*.
Intensité électrique	I	ampère	A	$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$: charge élémentaire, *seconde*.
Température	Θ	kelvin	K	$k = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$: constante de Boltzmann, *kilogramme, mètre, seconde*.
Quantité de matière	N	mole	mol	$N_{\mathrm{A}} = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$: nombre d'Avogadro.
Intensité lumineuse	J	candela	cd	$K_{\mathrm{cd}} = 683\,\mathrm{lm}\cdot\mathrm{W}^{-1}$: efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$, *kilogramme, mètre, seconde*.

TABLE 1 – Les dimensions et unités des sept grandeurs de base du système international.

La neuvième édition de la brochure sur le SI, accessible sur bipm.org/fr, précise les modifications adoptées lors de la redéfinition du système international d'unité votée en 2018 lors de la 26$^{\text{ème}}$ Conférence générale des poids et mesures. Ces nouvelles définitions sont en vigueur depuis 2019.

Document 2 – Nécessité de la redéfinition des unités

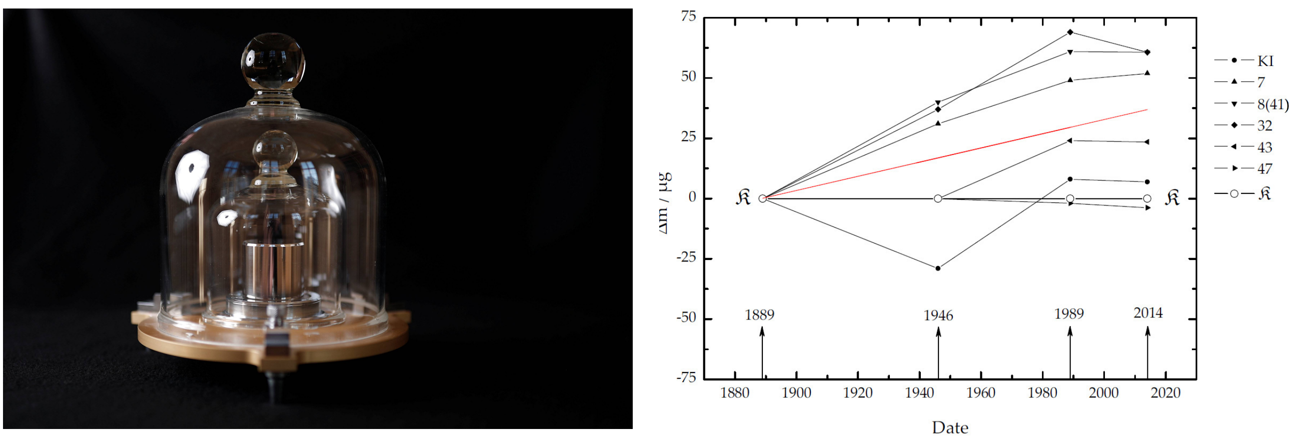


FIGURE 1 – À gauche : l'un des étalons en platine iridié, protégé sous deux cloches en verre, qui servait jusqu'en 2019 à définir le kilogramme. À droite : évolutions de l'écart de masse des six témoins officiels à la masse du prototype international du kilogramme (Thomas M. *et al.*). L'ajustement linéaire représenté en rouge donne une pente de l'ordre de 0,25 µg par an.

Document 3 – Préfixes

10^n	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
Préfixe	téra	giga	méga	kilo	unité	milli	micro	nano	pico	femto
Symbole	T	G	M	k		m	µ	n	p	f

Document 4 – Dimensions de quelques grandeurs courantes

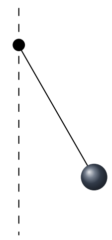
Dimension		**Unité**		**S.I.**	**Formule utile**
Charge	$\mathrm{T} \cdot \mathrm{I}$	coulomb	C	$\mathrm{s} \cdot \mathrm{A}$	$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Capacité	$\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{-2} \cdot \mathrm{T}^4 \cdot \mathrm{I}^2$	farad	F	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^4 \cdot \mathrm{A}^2$	$E = \dfrac{1}{2}Cu^2$
Inductance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{I}^{-2}$	henry	H	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$	$E = \dfrac{1}{2}Li^2$
Fréquence	T^{-1}	hertz	Hz	s^{-1}	$f = \dfrac{1}{T}$
Énergie	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}$	joule	J	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$E = \dfrac{1}{2}mv^2$
Force	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	newton	N	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$m\vec{a} = \vec{F}$
Résistance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-2}$	ohm	Ω	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$	$P = Ri^2$
Pression	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	pascal	Pa	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$p = \dfrac{F}{s}$
Tension	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-1}$	volt	V	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$	$P = ui$
Puissance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-3}$	watt	W	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$	$P = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ ou $\vec{F} \cdot \vec{v}$

Table 2 – Expressions des unités SI associées à quelques grandeurs couramment utilisées. La dernière colonne propose quelques exemples de formules qui seront vues pendant l'année et qui permettent de les retrouver rapidement.

Applications

Application 1 – Le pendule simple

On souhaite décrire le comportement du pendule simple représenté ci-contre.



1. Établir la liste de toutes les grandeurs physiques permettant de décrire ce système.
2. Indiquer la dimension et l'unité de chacune de ses grandeurs.

Application 2 – Le joule

1. Rappeler l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ d'une voiture de masse m allant à la vitesse v.
2. Exprimer la dimension E de l'énergie $\mathcal{E}_c$ en fonction des dimensions de base.
3. Exprimer le joule J à l'aide des unités de bases.
4. Montrer que le produit mgh est homogène à une énergie, où g est l'accélération de la pesanteur et h l'altitude de la voiture.
5. Retrouver l'expression des dimensions du Doc. 4 en fonction des dimensions de base.

Application 3 – Période du pendule simple

On note g l'accélération de la pesanteur et l la longueur du fil du pendule. Parmi les formules ci-dessous, identifier celle qui donne la période T des oscillations du pendule simple. Justifier.

1. $T = 2\pi\sqrt{lg}$
2. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{lg}}$
3. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Application 4 – Vitesse, longueur d'onde et fréquence

On considère une onde sonore de fréquence f et de longueur d'onde λ qui se propage à la vitesse v.

1. Rappeler les dimensions de ces trois grandeurs.
2. Par analyse dimensionnelle, retrouver une relation simple qui lie ces trois grandeurs.