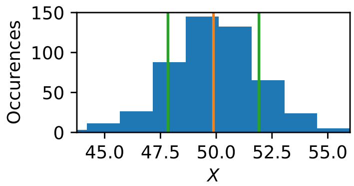
Mesures et incertitudes

Variabilité de la mesure

La répétition d'une mesure donne un ensemble de n valeurs $\{x_i\}$ plus ou moins dispersées.



`plt.hist(x)`

Moyenne

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

`np.mean(x)`

Écart-type expérimental

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

`np.std(x, ddof=1)`

Incertitude-type

La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur X est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$. Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type expérimental** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Estimation de l'incertitude-type

Estimation de type A

On réalise n **fois le même protocole** pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note $u(x)$ l'incertitude-type sur chacune de ces valeurs, évaluée en calculant l'écart-type expérimental de l'ensemble. Le **résultat de l'expérience** est alors

$$X = \overline{x} \pm u(\overline{x}), \quad \text{avec} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad u(\overline{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{n}}.$$

Estimation de type B

Lors d'une mesure sans variabilité observée, on **estime** la **plus petite plage** dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\overline{x}$ la **valeur centrale** de cette plage et Δ sa **demi-largeur**. Autrement dit, on est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\overline{x} - \Delta, \overline{x} + \Delta]$. Le **résultat de l'expérience** est alors

$$X = \overline{x} \pm u(\overline{x}), \quad \text{avec} \quad u(\overline{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

Présentation du résultat

L'incertitude-type $u(\overline{x})$ est exprimée avec **un seul chiffre significatif.** Le **dernier chiffre significatif donné sur l'estimation** $\overline{x}$ de la grandeur mesurée est la décimale sur laquelle porte $u(\overline{x})$. Le résultat doit être accompagné de son **unité**.

$$R = (50 \pm 1)\,\Omega \qquad v = (344{,}5 \pm 0{,}2)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad \lambda = (546 \pm 6) \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

Composition d'incertitudes

Incertitude-type totale

Pour une mesure soumise à plusieurs sources d'incertitude, l'**incertitude-type totale** est

$$u(\overline{x}) = \sqrt{u_1(\overline{x})^2 + u_2(\overline{x})^2 + \dots}.$$

Incertitude-type composée

Type de relation	Relation	Incertitude-type
Proportionnalité	$x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$u(\overline{x}) = \lvert\lambda\rvert u(\overline{x})$
Somme ou différence	$x = y + z$ ou $x = y - z$	$u(\overline{x}) = \sqrt{u(\overline{y})^2 + u(\overline{z})^2}$
Produit ou quotient	$x = y \times z$ ou $x = \dfrac{y}{z}$	$\dfrac{u(\overline{x})}{\overline{x}} = \sqrt{\left(\dfrac{u(\overline{y})}{\overline{y}}\right)^2 + \left(\dfrac{u(\overline{z})}{\overline{z}}\right)^2}$
Puissance ou racine	$x = y^p, \quad p \in \mathbb{R}$	$\dfrac{u(\overline{x})}{\overline{x}} = \lvert p\rvert \dfrac{u(\overline{y})}{\overline{y}}$

Dans un cas quelconque, on peut avoir recours à un algorithme de type **Monte-Carlo**.

```python
import numpy as np

def r(u,i):     # loi d'Ohm
    return u/i
# MESURES
u   = 12.1      # tension en volts
d_u =  0.5      # incertitude sur u en volts
i   = 242.2e-3 # intensité en ampère
d_i =   0.2e-3 # incertitude sur i en ampère

# MONTE-CARLO : simulation de 10000 mesures
u_sim = np.random.uniform(u-d_u, u+d_u, 10000)
i_sim = np.random.uniform(i-d_i, i+d_i, 10000)
r_sim = r(u_sim, i_sim)
print(r(u,i), np.std(r_sim, ddof=1))
```

Comparaison entre deux mesures

Écart normalisé

Pour comparer deux mesures x_1 et x_2 d'incertitudes-types $u(x_1)$ et $u(x_2)$, on définit l'**écart normalisé** E_n, ou **z-score**, par

$$E_n = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}.$$

Par convention, on dit que ces deux résultats sont **compatibles** si $E_n \leqslant 2$.