TD1 : Représentation des entiers en machine

« Il y a 10 types de personnes : celles qui savent écrire en binaire, et les autres »

Exercice 1 Pour les questions suivantes, Je ne vous demande pas forcément une valeur, vous pouvez donner la réponse sous forme de formule mathématique (accompagnée d'une justification).

1. Combien de valeurs différentes peut-on représenter sur 4 bits ?
2. Combien de valeurs différentes peut-on représenter sur n bits ?
3. Combien de fichiers différents peut-on écrire sur 15437 octets ?
4. On veut créer un type qui permet de représenter les lettres minuscules de 'a' à 'z'. Quel est le nombre minimal de bits nécessaires pour cela ?
5. Et si on veut aussi pouvoir représenter les lettres majuscules de 'A' à 'Z' ?
6. Et avec les chiffres de '0' à '9' ?

Exercice 2 Montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $b \geq 2$ un entier. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq 0$ et des entiers $(n_k)_{0 \leq k \leq p}$ dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tels que n peut s'écrire sous la forme*

$$n = \sum_{k=0}^{p} n_k b^k .$$

De plus, si l'on impose $n_p \neq 0$, cette écriture est unique.

(Dans le cas d'une écriture unique, on écrit $n = \overline{n_k \ldots n_0}^b$ et on parle de *décomposition de n en base b*.)

Exercice 3 Donner la représentation en complément à 2 sur 8 bits des entiers suivants : 5, 9, -18, -48, -128, 129, 2023, -2023.

Exercice 4 Quels entiers (en base 10) sont représentés en complément à 2 sur 8 bits de la façon suivante :

- 00111001
- 11000010
- 01100110
- 10001101

Exercice 5

1. Montrer que l'algorithme donnée en cours pour trouver la représentation en complément à 2 d'un entier (complément bit à bit suivi d'une incrémentation) est effectivement correct.
2. Quelle relation numérique y a-t-il entre deux entiers dont les représentations en compléments à 2 sur 8 bits ne diffèrent que par le bit de signe ?

Exercice 6 Soit un entier $b \geq 2$. Montrer que la décomposition en base b d'un entier $n > 0$ contient $1 + \lfloor log_b(n) \rfloor$ chiffres. *Indice : commencer par le montrer pour un entier de la forme b^k.*