DM1 – Dimensions et unités

Exercice 1 – Applications numériques

1. Longueur (m), temps (s), masse (kg), température (K), vitesse ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$), volume ($\mathrm{m^3}$), énergie (J), puissance (W).
2. $532\,\mathrm{nm} = 5{,}32 \times 10^{-1}\,\mathrm{\mu m} = 5{,}32 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$;
   $1{,}45\,\mathrm{GW} = 1{,}45 \times 10^{9}\,\mathrm{W}$;
   $0{,}125\,\mathrm{L} = 1{,}25 \times 10^{2}\,\mathrm{mL} = 1{,}25 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3}$.
3. On a
   $$1\,\text{année-lumière} = 365{,}25\,\mathrm{j} \times 24\,\mathrm{h} \times 60\,\mathrm{min} \times 60\,\mathrm{s} \times c \approx 9{,}47 \times 10^{12}\,\mathrm{km}$$
   . On en déduit que la nébuleuse à tête de cheval est située à $5{,}91 \times 10^{14}\,\mathrm{km}$ de la Terre.
4. La vitesse de la fusée est voisine de :
   $$v_{\text{fusée}} = 5{,}6 \times v \approx 1{,}9 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 6{,}8 \times 10^{3}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$
5. On a
   $$\boxed{F_\mathrm{G} = G\frac{M_\mathrm{T} M_\odot}{d^2}.}$$
   A.N. : $F_\mathrm{G} \approx 3{,}52 \times 10^{22}\,\mathrm{N}$.

Exercice 2 – Périmètre, surface et volume

1. Le périmètre $\mathcal{P}$ du cercle et l'aire $\mathcal{A}$ du cercle sont donnés par
   $$\boxed{\mathcal{P} = 2\pi r} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{A} = \pi r^2.}$$
2. La surface $\mathcal{S}$ d'une sphère et le volume $\mathcal{V}$ d'une boule sont donnés par
   $$\boxed{\mathcal{S} = 4\pi r^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3.}$$
3. La surface totale $\mathcal{S}$ et le volume $\mathcal{V}$ du cylindre sont donnés par
   $$\boxed{\mathcal{S} = 2\pi r h + 2\pi r^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{V} = \pi r^2 h.}$$

Exercice 3 – Analyse dimensionnelle

1. On a

$$[m] = \mathrm{M}, \quad [g] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}, \quad [h] = \mathrm{L} \quad \text{et} \quad [v] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}.$$

On cherche α, β et γ tels que

$$v = km^\alpha g^\beta h^\gamma,$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante adimensionnée.
L'équation aux dimensions s'écrit

$$[km^\alpha g^\beta h^\gamma] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}, \quad \text{d'où (...)} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = \gamma = \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$\boxed{v = k\sqrt{gh}.}$$

On montrera que, dans ce cas, $k = \sqrt{2}$ d'où $v = \sqrt{2gh}$.

2. L'expression de la force de rappel permet de déterminer la dimension de la constante de raideur du ressort. On trouve

$$[k] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-2}.$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on trouve

$$\boxed{f = a\sqrt{\frac{k}{m}},}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante adimensionnée.
De même, on montrera que $a = \frac{1}{2\pi}$, d'où $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

3. L'unité de la constante gravitationnelle G donnée dans l'Ex. 1 permet de déduire sa dimension. On a

$$[G] = \mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2}.$$

De même que précédemment, on trouve

$$\boxed{R_S = k\frac{GM}{c^2},}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante adimensionnée.
Le calcul complet donne $k = 2$.