TD O2 – Formation des images

On rappelle, pour un objet AB et son image $A'B'$ formée par une lentille mince de centre optique O et de foyers objet F et image F' :

- *les relations de Descartes :*

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}},$$

- *les relations de Newton :*

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}.$$

Miroirs et lentilles minces

★☆☆ Exercice 1 – Constructions illimitées

Au stylo et sur une feuille quadrillée, tracer un axe optique, une lentille convergente ou divergente et ses foyers.

1. Au crayon à papier, placer un objet et construire son image. Gommer et recommencer !
2. Faire de même en sens inverse : placer d'abord l'image et construire l'objet.

Explorer le plus de configurations possibles : objet/image à l'infini ou non, entre F et O, entre O et F', varier les distances focales, utiliser des associations de lentilles, etc.

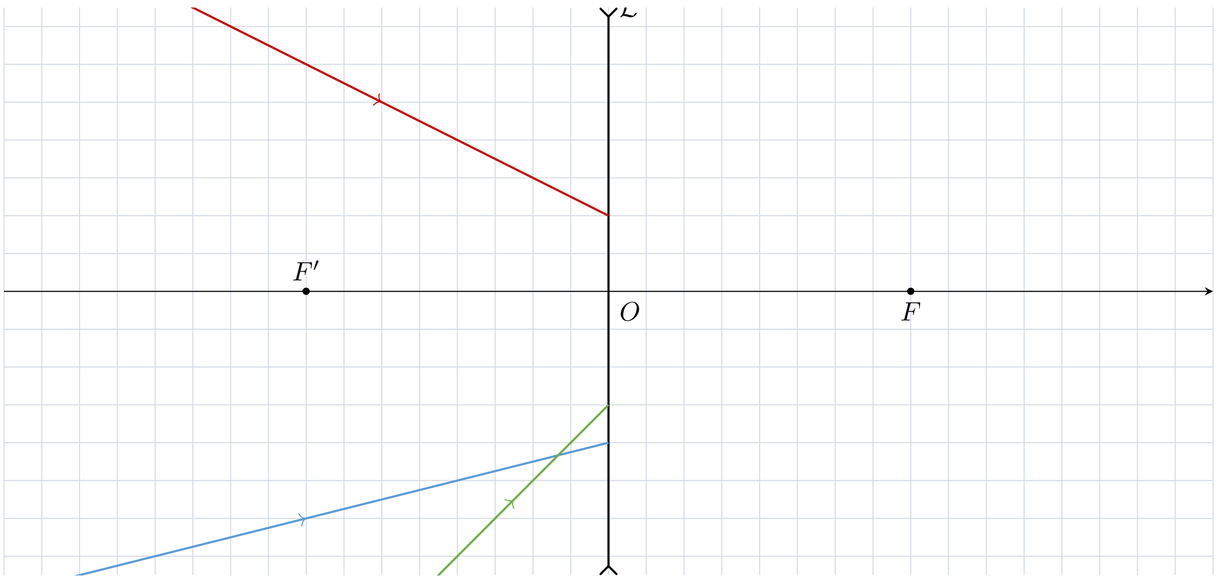
★☆☆ Exercice 2 – Manipuler les relations de conjugaison

Les questions sont indépendantes.

1. Une lentille de focale $f' = 50\,\text{cm}$ forme sur un écran situé à $1{,}5\,\text{m}$ de la lentille l'image d'un objet de hauteur $\overline{AB} = 3{,}0\,\text{cm}$. Déterminer la position de l'objet par rapport à la lentille et la taille de l'image sur l'écran.
2. Une lentille mince convergente donne d'un objet AB réel une image $A'B'$ réelle deux fois plus grande. La distance $\overline{AA'}$ vaut $90\,\text{cm}$. Déterminer les distances $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et f'.

★☆☆ Exercice 3 – Marche des rayons émergeant d'une lentille divergente

Représenter les rayons émergeant de la lentille.



★☆☆ Exercice 4 – Doublet de lentilles accolées

Deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de centres optiques respectifs O_1 et O_2, de vergences V_1 et V_2 sont accolées.

1. Déterminer la vergence équivalente $V_{\text{éq}}$ de l'ensemble en fonction de V_1 et V_2.
2. Transcrire cette relation pour les distances focales.
3. La relation de Gullstrand pour deux lentilles séparées d'une distance e et plongées dans un milieu d'indice n donne une focale équivalente $f'_{\text{éq}}$ telle que

$$\frac{1}{f'_{\text{éq}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{n f'_1 f'_2}$$

Cette relation est-elle compatible avec la réponse de la question 2 ?

★★☆ Exercice 5 – Doublet de lentilles

On dispose de deux lentilles minces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de centres O_1 et O_2. Leurs distances focales sont $f'_1 = +2{,}0\,\text{cm}$ et $f'_2 = +1{,}0\,\text{cm}$. On associe ces deux lentilles de façon à avoir $d = \overline{O_1O_2} = 4{,}0\,\text{cm}$. La lumière traverse $\mathcal{L}_1$ puis $\mathcal{L}_2$.

On appelle F et F' les foyers objet et image de l'ensemble $\{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}$.

1. Déterminer graphiquement la position de F et F'.
2. Retrouver ce résultat par le calcul à l'aide des relations de conjugaison.

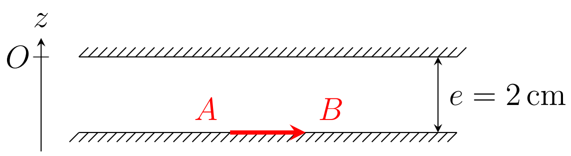
Un objet AB réel est situé à $10\,\text{cm}$ en avant de $\mathcal{L}_1$. On note A_1B_1 l'image intermédiaire formée par $\mathcal{L}_1$ et $A'B'$ l'image formée par le doublet.

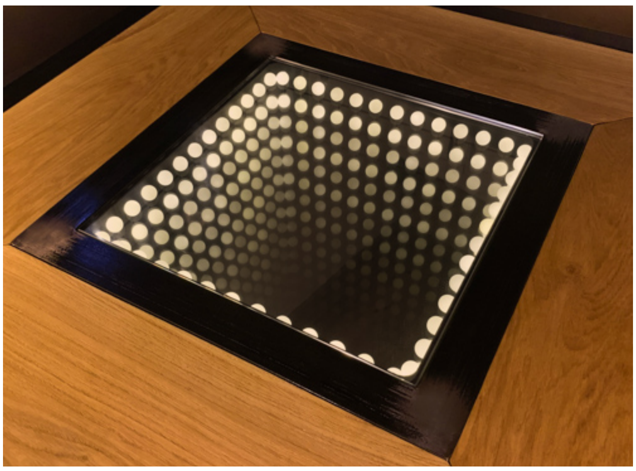
3. Déterminer graphiquement les positions de A_1B_1 et de $A'B'$.
4. Retrouver ces résultats par le calcul.
5. Déterminer graphiquement puis par le calcul le grandissement γ du doublet.
6. Donner la nature (réelle ou virtuelle) des images A_1B_1 et $A'B'$.

Le doublet étudié précédemment est noté $(+2, +1, +4)$. Pour s'exercer, on reprendra l'étude avec les doublets $(+4, -2, +8)$, $(+6, +4, +8)$, $(+5, -3, +4)$ et $(-5, +3, +9)$.

★★☆ Exercice 6 – « Miroir infini »

Un effet « miroir infini » peut être obtenu en enfermant un source lumineuse entre deux miroirs partiellement réfléchissants. Pour simplifier, on supposera que la source lumineuse est plaquée au miroir inférieur comme le montre le schéma ci-dessous. L'observateur est situé au dessus de l'ensemble, c'est-à-dire du côté des z positifs.





1. On appelle A_iB_i les images successives de AB issues des différentes réflexions possibles, où i est un entier strictement positif. Construire les six premières images de AB.
2. Donner la condition sur i pour laquelle l'image est visible par l'observateur.
3. Exprimer l'angle α_i sous lequel est vue une ampoule de diamètre $d = 1{,}00\,\text{cm}$ par un observateur situé à une altitude $z = 25\,\text{cm}$. Faire l'application numérique pour $i = 10$.
4. Pourquoi les images successives sont-elles de plus en plus sombres ?

★★★ Exercice 7 – Focométrie

On se propose de déterminer la distance focale f' d'une lentille convergente $\mathcal{L}$ de trois manières différentes.

1. **Autocollimation.** Soit un objet AB. On accole à l'arrière de la lentille un miroir plan et on déplace cet ensemble jusqu'à ce que l'image $A'B'$ soit dans le même plan que l'objet. Justifier que la distance objet-lentille est exactement la distance focale.
2. On fixe un écran à une distance D d'un objet AB.
   Montrer que la distance D entre l'objet et l'écran ne peut être inférieure à $4f'$ si l'on veut obtenir une image nette sur l'écran avec la lentille $\mathcal{L}$.
3. **Méthode de Bessel.** On fixe un écran à une distance $D > 4f'$ d'un objet AB.
   Montrer qu'il existe deux positions de la lentille séparées d'une distance d donnant une image nette. Exprimer la distance focale de la lentille en fonction de D et d. Montrer que les grandissements associés à ces positions sont inverses l'un de l'autre.
4. **Méthode de Silbermann**. Il s'agit d'un cas particulier de la méthode précédente dans le cas où $D = 4f'$.
   Combien y a-t-il alors de position(s) de $\mathcal{L}$ permettant d'obtenir une image nette sur l'écran ? Que vaut le grandissement dans ce cas ?

phyanim.sciences.univ-nantes.fr

★★★ Exercice 8 – Miroir et lentille

Une lentille mince convergente $\mathcal{L}$ de centre O est placée à une distance $d = 0{,}75\,\text{m}$ devant un miroir plan $\mathcal{M}$ de sommet S. Un point mobile A sur l'axe du système coïncide avec son image en deux points A_1 et A_2 distants de $a = 1\,\text{m}$.

Déterminer la distance focale f' de la lentille.

Coups de pouce

Ex. 3 On peut imaginer que le rayon est issu d'un objet ponctuel à l'infini.
Ex. 4 1. Écrire les relations de conjugaison de Descartes pour $A \underset{\mathcal{L}_1}{\rightarrow} A_1 \underset{\mathcal{L}_2}{\rightarrow} A_2$, avec $O_1 = O_2 = O$.
Ex. 5 1. Où se trouve l'image d'un objet situé à l'infini ? Utiliser ensuite le principe de retour inverse pour déterminer la position de F.
Ex. 6 2. De quelles images sont issues les rayons lumineux qui parviennent à l'observateur ?
Ex. 7 Cf. TP1 - Focométrie.

Systèmes optiques

★☆☆ Exercice 9 – Loupe

On s'intéresse à une loupe formée d'une lentille convergente de vergence $V = 10\,\delta$, utilisée pour aider à la lecture.

1. Déterminer la distance entre la page et la loupe pour une observation confortable.
2. Exprimer et calculer le grossissement commercial G_c de cette loupe, défini comme le rapport :

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_{PP}},$$

   où α' est la taille angulaire d'un objet observé à travers la loupe et α_{PP} est celle de ce même objet si on l'observait au punctum proximum.

★☆☆ Exercice 10 – Limites et défauts de l'œil

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer la taille minimale d'une lettre d'un panneau de signalisation pour qu'elle soit distinguable, à l'œil nu, à une distance $D = 200\,\text{m}$.
2. La distance d entre la rétine et le cristallin est de l'ordre de 1,7 cm. Donner l'intervalle dans lequel varie la distance focale f' du cristallin d'un œil sain pour couvrir l'ensemble de la plage d'accommodation.
3. Le cristallin d'un œil hypermétrope a une vergence inférieure à celle d'un œil sain. L'image d'un objet à l'infini se forme-t-elle avant ou après la rétine ?
4. Le punctum remotum (PR) d'un œil myope se trouve à $d_{PR} = 26\,\text{cm}$ et son punctum proximum (PP) à $d_{PP} = 13{,}5\,\text{cm}$. Exprimer puis calculer la vergence d'un verre correcteur placé à $d_c = 1\,\text{cm}$ du cristallin qui renvoie le PR à l'infini. Commenter la nature de la lentille utilisée.

★☆☆ Exercice 11 – Lunette de Galilée

La première observation des satellites de Jupiter remonte au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. À l'aide d'une lunette de sa conception, Galilée (1564 – 1642) parvint ainsi à observer Io, la plus proche des lunes de Jupiter. Quand elle est au plus proche de la Terre, Jupiter se situe à $d_{T-J} \approx 6{,}3 \times 10^8\,\text{km}$ de nous et l'orbite de Io a un rayon $r_{Io} = 4{,}2 \times 10^5\,\text{km}$.

La lunette de Galilée est un système afocal composé d'un objectif $\mathcal{L}_1$ convergent, de distance focale $f_1' = 980\,\text{mm}$ et d'un oculaire $\mathcal{L}_2$ divergent, de distance focale $f_2' = -47{,}5\,\text{mm}$.

1. Est-il possible de distinguer Jupiter et Io à l'œil nu ?
2. Rappeler la signification du terme afocal. Faire un schéma de la lunette utilisée par Galilée.
3. Déterminer la longueur l du tube de cette lunette, c'est-à-dire la distance entre les lentilles.
4. Exprimer puis calculer le grossissement G de cette lunette en fonction de la distance focale des deux lentilles. Calculer l'écart angulaire entre Io et Jupiter quand ils sont observés à travers la lunette.

Un pirate se rend sur Tortuga pour remplacer sa longue-vue, perdue au combat. Le marchand ne dispose que de deux lunettes : une lunette astronomique et une lunette de Galilée.

5. Indiquer celle qui pourrait remplacer la longue-vue du pirate. Justifier.

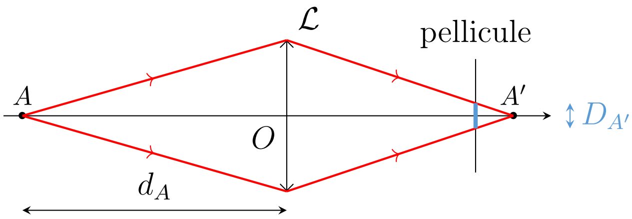
★★☆ Exercice 12 – Appareil photo jetable

On modélise un appareil photo jetable par l'association d'une lentille convergente et d'une pellicule. L'objectif n'est composé que d'une seule lentille mince $\mathcal{L}$, de distance focale f', de diamètre utile D_{L}. La distance d entre la lentille et la pellicule est fixée lors de la fabrication de telle sorte qu'un objet à l'infini donne une image nette sur la pellicule. Aucune mise au point n'est possible, c'est-à-dire que la distance d n'est pas modifiable par l'utilisateur.

1. Déterminer la valeur de la distance d qu'il faut prévoir lors de la fabrication.

2. Exprimer la dimension X, sur la pellicule, de l'image de la Lune qui a un diamètre apparent α (on pourra s'aider d'une construction pour répondre). Faire l'application numérique avec $f' = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ et $\alpha = 0{,}50°$.

Un objet ponctuel A, qui n'est pas situé à l'infini, a son image en dehors du plan de la pellicule et donne sur la pellicule une tache de diamètre $D_{A'}$ (cf. schéma ci-contre). On appelle d_A la distance entre le point A et la lentille ($d_A > 0$).



3. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de f' et d_A.

4. Montrer que l'expression de $D_{A'}$ en fonction du diamètre utile de la lentille D_{L}, f' et d_A est :

$$D_{A'} = \frac{f'}{d_A} D_{\mathrm{L}}.$$

La pellicule est formée de grains que l'on supposera circulaires et de même diamètre ε. Une image, après le développement de la pellicule, parait nette si un point objet n'a éclairé qu'un seul grain et a donc donné, sur la pellicule, une tache de diamètre inférieur ou égal à ε.

5. Sachant que $f' = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, que $D_{\mathrm{L}} = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ et que $\varepsilon = 20\,\mathrm{µm}$, calculer numériquement la position du point A (d_A) le plus proche qui est encore net après le développement.

★★★ Exercice 13 – Microscope

Le microscope permet d'observer des objets proches mais de très faibles dimensions.

Un microscope peut-être considéré comme un système à deux lentilles minces convergentes centrées sur le même axe et distantes de $D = \overline{O_1O_2}$:

- un objectif $\mathcal{L}_1$, très convergent, de centre O_1, de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 4{,}0\,\mathrm{mm}$;
- un oculaire $\mathcal{L}_2$, de centre O_2, de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

1. Représenter sans respecter l'échelle la marche d'un faisceau de trois rayons issus du point B d'un objet AB légèrement en avant de F_1 dans les deux cas suivants :

- la distance objectif-oculaire D est telle que l'image de AB donnée par l'objectif (image intermédiaire A_1B_1) se forme entre O_1 et F_2 ;
- D est telle que A_1B_1 se forme entre F_2 et O_2.

Expliquer quel cas convient pour un microscope.

2. La distance D est fixée par construction à 20 cm. La mise au point se fait par déplacement de l'ensemble objectif-oculaire par rapport à l'objet.

Déterminer les positions de l'image intermédiaire A_1B_1 et de l'image finale $A'B'$, repérées respectivement par $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{O_2A'}$, d'un objet se trouvant en A tel que $\overline{O_1A} = -4{,}1\,\text{mm}$. Déterminer également le grandissement γ du système en fonction des grandissements γ_1 et γ_2 de chaque lentille et faire l'application numérique.

Mise au point et profondeur de champ

3. Pour éviter à l'œil la fatigue de l'accommodation lors d'une observation qui peut être longue, l'image doit être à l'infini pour un œil emmétrope.

Où doit se former l'image intermédiaire pour qu'il en soit ainsi ? Donner la position de l'objet dans ce cas.

4. Déterminer la profondeur de champ maximale, c'est-à-dire la distance Δx entre la position d'un objet vu sans accommoder et celle d'un objet vu en accommodant au maximum pour un œil emmétrope, placé au foyer principal image de l'oculaire. Conclure, compte tenu de la valeur numérique de Δx, sur la façon de mettre au point avec un microscope.

Puissance et grossissement

5. On définit la puissance d'un microscope par la quantité $P = \alpha'/AB$, exprimée en dioptries, α' étant le diamètre apparent de l'image finale (c'est-à-dire l'angle sous lequel on la voit) et AB la dimension de l'objet.

Refaire une construction à trois rayons faisant apparaître α', dans le cas de la vision à l'infini. Exprimer, puis calculer P_i (puissance intrinsèque) définie comme la puissance du microscope dans le cas de la vision à l'infini.

6. On définit le grossissement par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$, rapport des diamètres apparents à travers le microscope en vision à l'infini et à l'œil nu au PP.

Relier G à P_i et à d_{PP}. Faire l'application numérique pour l'œil emmétrope.

Coups de pouce

Ex. 11 1. Quelle est la limite de résolution angulaire de l'œil ?
Ex. 12 3. Attention à l'algébrisation des distances !

Ex. 13 1. Prendre le temps de faire de grands schémas soignés.

✓ Éléments de correction

Ex. 2 1. $\overline{OA} = -75\,\text{cm}$, $\overline{A'B'} = -6{,}0\,\text{cm}$; 2. $\overline{OA} = -30\,\text{cm}$, $\overline{OA'} = 60\,\text{cm}$, $f' = 20\,\text{cm}$
Ex. 3 Cf. App. 6.
Ex. 4 1. $V_{\text{éq}} = V_1 + V_2$.
Ex. 5 1. $\overline{O_2F'} = 2{,}0\,\text{cm}$ et $\overline{O_1F} = -6{,}0\,\text{cm}$; 2. $\overline{O_2F'} = \frac{f'_2(f'_1-d)}{f'_2+f'_1-d}$ et $\overline{O_1F} = \frac{f'_1(d-f'_2)}{f'_1-d+f'_2}$; 3. $\overline{O_1A_1} = 2{,}5\,\text{cm}$ et $\overline{O_2A'} = 3{,}0\,\text{cm}$; 4. $\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}\cdot f'_1}{\overline{O_1A}+f'_1}$ et $\overline{O_2A'} = \frac{f'_2(\overline{O_1A}\cdot f'_1 - d\cdot\overline{O_1A} - df'_1)}{\overline{O_1A}\cdot f'_1 + (f'_2-d)(f'_1+\overline{O_1A})}$; 5. $\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_1A_1}-d}\cdot\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = 0{,}5$; 6. images réelles.
Ex. 6 2. i pair ; 3. $\alpha_i \approx \frac{d}{z+(i+1)e}$, $\alpha_{10} = 2{,}1\times10^{-2}$.
Ex. 7 3. $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$; 4. $\gamma = -1$.
Ex. 8 $f' = \sqrt{2d^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{a^2}{4d^2}}\right)}$, $f' = 48\,\text{cm}$.
Ex. 9 1. $d = 10\,\text{cm}$; 2. $G_\text{c} = \frac{d_\text{PP}}{f'} = 2{,}5$.
Ex. 10 1. $h \approx \varepsilon D \approx 6\,\text{cm}$; 2. $f' \in \left[\frac{dd_\text{PP}}{d+d_\text{PP}}, d\right] = [1{,}6\,\text{cm}, 1{,}7\,\text{cm}]$; 3. après la rétine ; 4. $V = \frac{1}{d_\text{c}-d_\text{PR}} = -4\,\delta$.
Ex. 11 1. $\alpha \approx \frac{r_\text{Io}}{d_\text{T-J}} \approx 7\times10^{-4} > 3\times10^{-4}$; 3. $l = f'_1 + f'_2 \approx 93{,}3\,\text{cm}$; 4. $G = \frac{-f'_1}{f'_2} = 20{,}6$, $\alpha' = G\alpha \approx 1{,}4\times10^{-2}$.
Ex. 12 1. $d = f'$; 2. $X \approx f'\alpha = 0{,}26\,\text{mm}$; 3. $\overline{OA'} = \frac{f'd_A}{d_A-f'}$; 5. $d_A = \frac{f'D_\text{L}}{\varepsilon} = 3{,}0\,\text{m}$.
Ex. 13 1. second cas ; 2. $\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}\cdot f'_1}{f'_1+\overline{O_1A}} = 16{,}4\,\text{cm}$, $\overline{O_2A'} = \frac{(\overline{O_2O_1}+\overline{O_1A_1})\cdot f'_2}{\overline{O_2O_1}+\overline{O_1A_1}+f'_2} = -36{,}0\,\text{cm}$ et $\gamma = \gamma_1\gamma_2 = -400$; 3. $\overline{O_1A} = \frac{f'_1\cdot\overline{O_1A_1}}{f'_1-\overline{O_1A_1}} = -4{,}102\,\text{mm}$; 4. $\Delta x = 4\,\mu\text{m}$; 5. $P_i = \frac{-\gamma_1}{f'_2} = 980\,\delta$; 6. $G = P_i d_\text{PP} = 240$.

Exercice 14 – Profondeur d'un pont – Résolution de problème

Le pont ci-dessus permet le passage sous une route 2×2 voies. Il a été photographié avec un appareil photo modélisé par l'association d'une lentille convergente de distance focale $f' = 35\,\text{mm}$ et d'un capteur de dimensions $24\,\text{mm}\times36\,\text{mm}$.

Estimer, à partir de la photo, la profondeur du pont.

Exercice 15 – Lunette astronomique – Oral CCP

Mars est située à une distance variant entre 56 et 160 millions de kilomètres de la Terre. Son diamètre vaut 6800 km. On l'observe au travers d'une lunette astronomique composée d'un objectif et d'un oculaire. Ces deux systèmes optiques complexes sont modélisables par deux lentilles convergentes, la première (l'objectif) de focale 1,0 m et la seconde (l'oculaire) de focale 2,5 cm.

1. Calculer le diamètre apparent α de la planète Mars lorsqu'elle est observée sans lunette.

2. Commençons par étudier la structure de la lunette.

- **2.a.** La lunette est un instrument d'optique afocal. Quel en est l'intérêt ? Quelle en est la conséquence sur la position des lentilles ?
- **2.b.** Tracer la marche d'un faisceau non parallèle à l'axe dans la lunette, en prenant pour le schéma $f'_{\text{obj}} = 4f'_{\text{oc}}$.
- **2.c.** L'image finale est-elle droite ou renversée ?

3. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$, où α est le diamètre apparent de la planète et α' l'angle sous lequel elle est vue en sortie de la lunette.

- **3.a.** Exprimer G en fonction de f'_{obj} et f'_{oc}.
- **3.b.** Sous quel angle Mars est-elle perçue lorsque son diamètre apparent est minimal ?

4. Où faut-il placer le capteur CCD d'un appareil photo pour photographier la planète ?

5. Quelle est la différence entre les lunettes et les télescopes ? Pourquoi utilise-t-on plus volontiers les télescopes

python Exercice 16 – Relation de conjugaison de Descartes

On réalise l'image d'un objet placé sur la graduation 0 d'un banc optique à l'aide d'une lentille convergente sur un écran. Pour plusieurs positions x_1 de la lentille on repère la position x_2 de l'écran pour laquelle l'image est nette.

x_1 (cm)	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	20,0	25,0	30,0	40,0	50,0
x_2 (cm)	79,2	51,1	41,0	37,3	33,0	32,1	33,2	36,9	41,1	50,3	59,8

1. On note $\overline{OA}$ la distance algébrique entre la lentille et l'objet, et $\overline{OA'}$ celle entre la lentille et l'écran. Représenter graphiquement $\frac{1}{\overline{OA'}}$ en fonction de $\frac{1}{\overline{OA}}$.

2. Réaliser un ajustement linéaire des données avec la fonction `numpy.polyfit` (cf. ci-dessous). Ces données sont-elles en accord avec la relation de conjugaison de Descartes ? Justifier.

3. Déduire des paramètres de l'ajustement la distance focale de la lentille utilisée.

`numpy.polyfit(x, y, 1)` : réalise un ajustement linéaire des données contenues dans les tableaux `x` et `y`. Renvoie les paramètres de la droite d'équation $y = ax + b$ sous la forme d'un tableau : `[a, b]`.