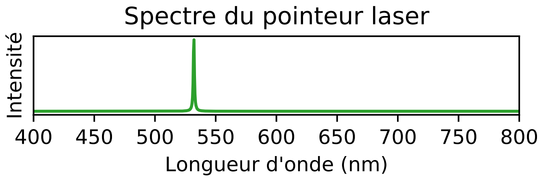
TD O1 – Optique géométrique
Correction

Exercice 1 – Couleur d'un laser

1. Le spectre d'un laser ne comporte qu'une seule raie, ici à 532 nm.



2. On a $\lambda_0 \in [500\,\mathrm{nm}, 550\,\mathrm{nm}]$, ce qui correspond au **vert**.

3. On a

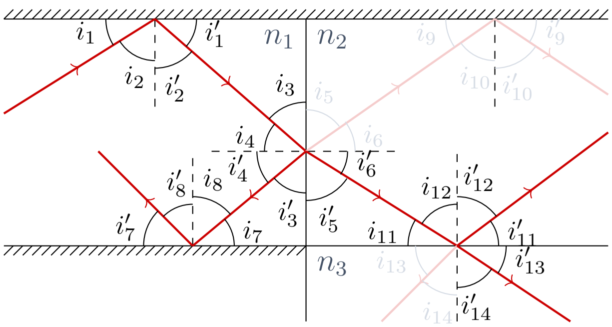
$$\boxed{\lambda_{\text{plexiglas}} = \frac{\lambda_0}{n}.}$$

A.N. : $\lambda_{\text{plexiglas}} = 352\,\mathrm{nm}$.
Le pointeur est toujours **vert** car c'est la longueur d'onde dans le *vide* qui nous indique la couleur du rayonnement.

Exercice 2 – Snell-Descartes

Le schéma ci-contre n'est pas à l'échelle.

1. Sur le schéma ci-dessous, les rayons inexistants sont représentés en clair.



2. Pour les rayons existants et pour chaque k impair, on a

$$i_k = \frac{\pi}{2} - i_{k+1} \quad \text{et} \quad i'_k = \frac{\pi}{2} - i'_{k+1} \quad \text{(géométrie)}. \tag{1}$$

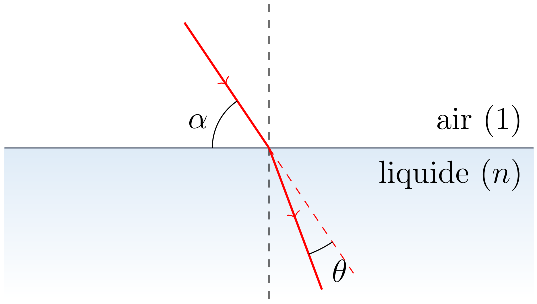
Pour les rayons existants et pour chaque k pair, on a

$$i_k = i'_k \quad \text{(optique, 2}^{\text{ème}}\text{ loi de Snell-Descartes)}, \tag{2}$$

car les angles ne sont pas orientés. En utilisant les deux relations précédentes (Éq. 1), on déduit que la relation 2 est valable également pour les k impairs.
Finalement, la troisième loi de Snell-Descartes au niveau des dioptres 1/2 et 2/3 s'écrit

$$n_1 \sin i_4 = n_2 \sin i'_6 \quad \text{et} \quad n_2 \sin i_{12} = n_3 \sin i'_{14} \quad \text{(optique, 3}^{\text{ème}}\text{ loi de Snell-Descartes)}.$$

Exercice 3 – Indice de réfraction



La troisième loi de Snell-Descartes au niveau du dioptre air/liquide s'écrit

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta\right),$$

soit en utilisant le cercle trigonométrique :

$$\cos\alpha = n\cos(\alpha + \theta).$$

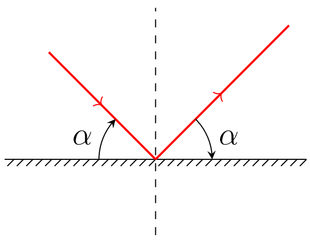
On en déduit

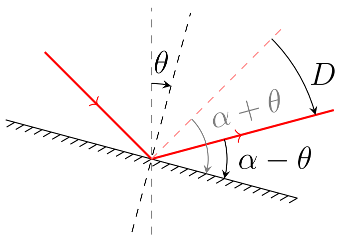
$$\boxed{n = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}.}$$

A.N. : $n \approx 1{,}60$.

Exercice 4 – Microscope à force atomique

Un schéma permet de répondre à la question.





On voit que, en étant vigilant à l'orientation des angles,

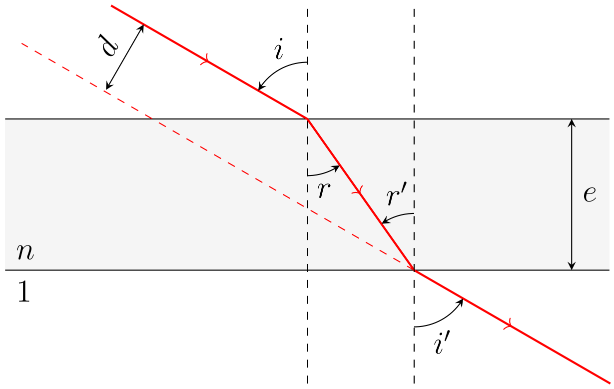
$$D = (\alpha + \theta) - (\alpha - \theta),$$

d'où

$$\boxed{D = 2\theta.}$$

Exercice 5 – Passage à travers une vitre

1. On commence par un schéma :



La troisième loi de Snell-Descartes au niveau de chacun des deux dioptres s'écrit :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin r' = \sin i'.$$

Les angles r et r' sont alternes-internes égaux. On en déduit $\sin i = \sin i'$, soit

$$\boxed{i = i',}$$

car i et i' sont compris entre 0 et $\pi/2$ et parce que la fonction sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$.

Le rayon n'est donc pas dévié, mais décalé d'une distance d en passant a travers la vitre. On peut montrer (non demandé ici) que

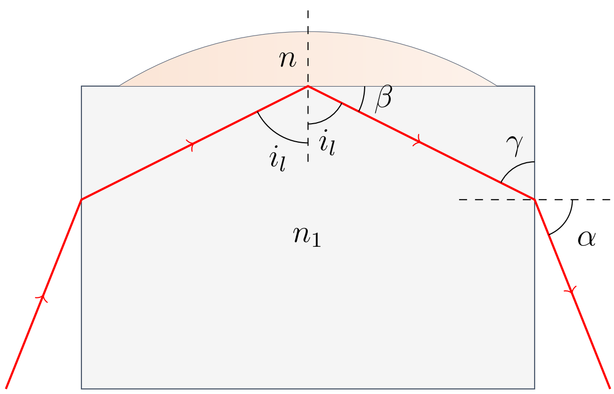
$$d = e\left(1 - \frac{\cos i}{n \cos r}\right)\sin i.$$

2. Le décalage maximal est obtenu en incidence rasante, c'est-à-dire pour $i = \pi/2$. On a alors

$$\boxed{d = e.}$$

Exercice 6 – Réfractométrie

1. On fait apparaitre l'angle limite i_l au niveau du dioptre verre/liquide.



Au niveau dioptre verre/air, la troisième loi de Snell-Descartes s'écrit

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\alpha,$$

Or $\gamma = i_l$ car ils sont alternes-internes égaux et en utilisant le cercle trigonométrique, on obtient

$$n_1 \cos i_l = \sin\alpha.$$

En utilisant la relation $\cos^2 i_l + \sin^2 i_l = 1$, on a

$$n_1\sqrt{1-\sin^2 i_l} = \sin\alpha.$$

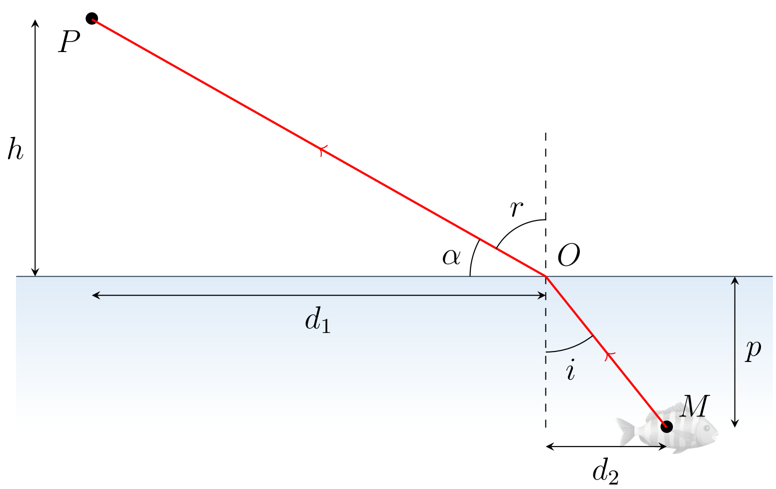
Finalement, par définition de l'angle limite (cf. cours) $\sin i_l = n/n_1$ et après calcul, on obtient

$$\boxed{n = \sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}}$$

2. A.N. : $n = 1{,}42$. Il pourrait s'agir d'eau sucrée à $50\,\%$.
3. L'indice du verre doit être supérieur à celui du liquide pour que la mesure fonctionne car il doit y avoir réflexion totale au niveau du dioptre entre le liquide et le verre. Pour réaliser une mesure sur des liquides ayant un indice optique élevé, il faut donc que l'indice du verre soit au moins aussi élevé. Avec un verre flint, le réfractomètre possède une plage de mesure plus importante qu'avec un verre ordinaire.

Exercice 7 – À la pêche

Sur le schéma, le point P correspond aux yeux du pêcheur, le point M au poisson.



On cherche la distance $d = d_1 + d_2$.

Du côté du pêcheur, on a

$$\tan\alpha = \frac{h}{d_1}, \quad \text{d'où} \quad d_1 = \frac{h}{\tan\alpha}.$$

Du côté du poisson, on a

$$\tan i = \frac{d_2}{p} \quad \text{d'où} \quad d_2 = p \tan i = p\frac{\sin i}{\cos i} = p\frac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}}.$$

La troisième loi de Snell-Descartes au niveau du dioptre eau/air s'écrit

$$n \sin i = \sin r = \cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad \sin i = \frac{\cos\alpha}{n}.$$

En injectant cette expression dans celle de d_2, on obtient après calcul

$$d_2 = p\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}.$$

Finalement,

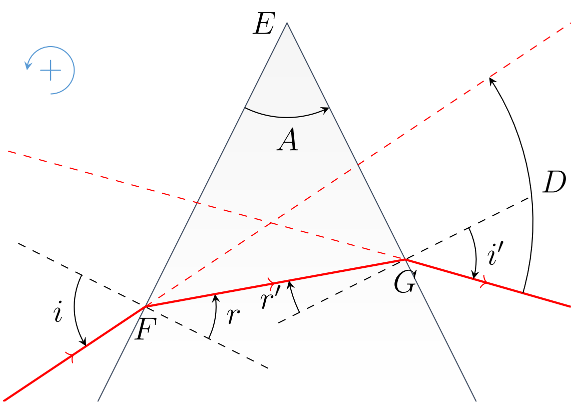
$$\boxed{d = \frac{h}{\tan\alpha} + p\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}.}$$

A.N. : $d = 3{,}80\,\mathrm{m}$.

Exercice 8 – Prisme

1. Il s'agit d'écrire les relations de Snell-Descartes, soit

$$\boxed{\sin i = n \sin r} \quad \text{et} \quad \boxed{n \sin r' = \sin i'.}$$



2. En veillant à l'orientation des angles, choisie positivement dans le sens trigonométrique, on peut écrire que la somme des angles du triangle EFG vaut π :

$$\pi = A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right),$$

car $r' < 0$. On a donc

$$\boxed{A = r - r'.}$$

Le rayon subit une première déviation $i - r > 0$ à son entrée dans le prisme. La deuxième déviation en sortie du prisme vaut quant à elle $r' - i' > 0$. On a donc

$$D = (i - r) + (r' - i'), \quad \text{d'où} \quad \boxed{D = i - i' - A.}$$

3. On a

$$D = i - i' - A,$$

d'où en utilisant la relation de Snell-Descartes entre i' et r'

$$D = i - A - \arcsin\left(n \sin r'\right) = i - A - \arcsin\left(n \sin(r - A)\right),$$

d'où finalement avec l'autre relation de Snell-Descartes :

$$\boxed{D = i - A - \arcsin\left(n \sin\left(\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) - A\right)\right).}$$

Exercice 9 – Sauvetage en mer

1. On obtient les distance d_1 et d_2 parcourues sur le sable puis dans l'eau à l'aide du théorème de Pythagore :

$$d_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{et} \quad d_2 = \sqrt{(L - x)^2 + b^2}.$$

Le temps de parcours correspond au temps mis pour atteindre l'eau, puis pour atteindre le nageur, soit

$$T(x) = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L - x)^2 + b^2}}{v_2}.}$$

2. $T(x)$ atteint un extremum local si $\dfrac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = 0$. On calcule la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(L - x)}{2v_2\sqrt{(L - x)^2 + b^2}}.$$

Sur l'intervalle étudié, la dérivée s'annule pour une unique valeur de x et il s'agit d'un minimum (on peut s'en assurer en étudiant le signe de la dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2}$ au niveau de l'extremum).

On peut réécrire cette expression en faisant intervenir les sinus des angles i_1 et i_2, soit

$$\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2}.$$

On a donc finalement

$$\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}.}$$

En introduisant une vitesse c (fictive : la « vitesse du maitre-nageur dans le vide ») telle que

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{c}{n_2},$$

où n_1 et n_2 sont des constantes (des « indices »), on retrouve la troisième loi de Snell-Descartes !

La loi de Snell-Descartes est en effet une conséquence d'un principe plus fondamental, le principe de Fermat, qui indique que la trajectoire suivie par un rayon lumineux est celle dont la durée est extrémale (ici minimale).