DM2 – Arc-en-ciel

Exercice 1 – Arc-en-ciel

1. En I, la troisième loi de Snell-Descartes s'exprime, avec l'indice de l'air pris égal à 1 :

$$\boxed{\sin i = n \sin r.}$$

2. Le triangle OIJ est isocèle en O, on a donc

$$\alpha = -r.$$

En J, la deuxième loi de Snell-Descartes s'écrit

$$\alpha = -\beta.$$

On a donc

$$\boxed{\alpha = -\beta = -r.}$$

D'autre part, le triangle OJK est isocèle en O, on a donc

$$\beta = -\gamma, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = -r.}$$

Enfin, la troisième loi de Snell-Descartes en K s'écrit

$$n \sin \gamma = \sin \delta.$$

Or $\gamma = -r$, d'où en utilisant le résultat de la question 1,

$$\boxed{\delta = -i,}$$

car le sinus est bijectif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3. En utilisant la troisième loi de Snell-Descartes en J et avec $\alpha = -r$, l'angle réfracté en J vaut $-i$: il est toujours défini et **il ne peut y avoir réflexion totale en J.**

4. Le rayon incident est dévié d'un angle $r - i$ en I, puis de $\beta - \alpha - \pi$ en J, et enfin de $\delta - \gamma$ en K. La déviation totale est donc

$$D = r - i + \beta - \alpha - \pi + \delta - \gamma.$$

Avec les expressions obtenues précédemment, on obtient

$$\boxed{D = 4r - 2i - \pi.}$$

Avec la troisième loi de Snell-Descartes en I, l'expression devient

$$\boxed{D = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i\right) - 2i - \pi.}$$

5. Pour déterminer la couleur de ces rayonnements, on calcule leur longueur d'onde dans le vide. On a

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

A.N. : $\lambda_1 = 410\,\text{nm}$ ce qui est du domaine du **violet** et $\lambda_2 = 671\,\text{nm}$ ce qui est du domaine du **rouge**.

6. Par définition,

$$\boxed{n = \frac{c}{v}.}$$

A.N. : $n_1 = 1{,}339$ et $n_2 = 1{,}332$.

7. n est un coefficient numérique sans dimension, donc

$$\boxed{[A] = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{[B] = \mathrm{L}^2}.$$

A est donc adimensionné et s'exprime sans unité, tandis que B est homogène à une surface et s'exprime en mètres carrés (m^2).

8. Au minimum de déviation on a

$$i_0 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right),$$

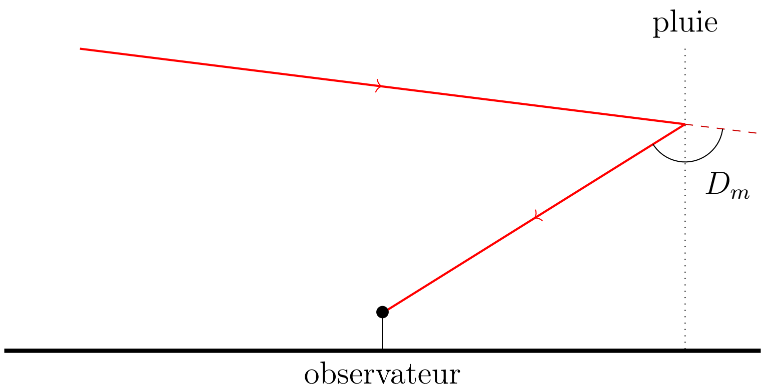
et on a par définition du minimum de déviation

$$D_m = \left|4\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i_0\right) - 2i_0 - \pi\right|.$$

Les applications numériques donnent :

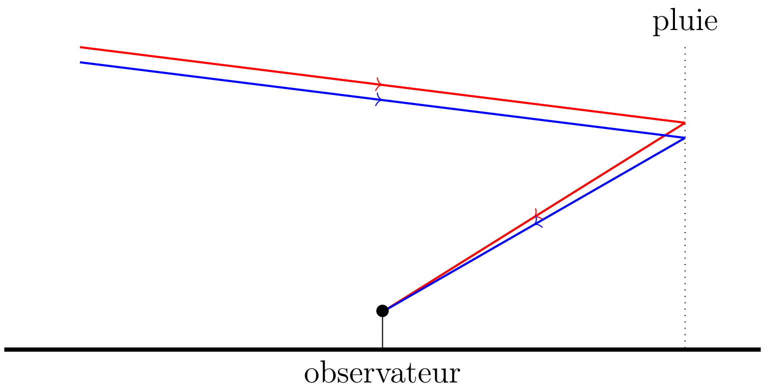
	violet	**rouge**
n	1,339	1,332
i_0	59,06°	59,47°
D_m	138,8°	137,8°

9. La déviation minimale est plus proche de 180° que de 0°. Un schéma de la situation, pour le rouge par exemple serait comme ci-dessous.



Pour observer un arc-en-ciel, on doit donc se placer **dos au Soleil**.

10. Le minimum de déviation est plus grand pour le bleu que pour le rouge, ce qui se traduit par la situation représentée ci-dessous.



Le rouge se situe donc **à l'extérieur de l'arc**, ce qui est conforme aux observations.

Complément : Incidence au minimum de déviation

On souhaite retrouver l'expression de l'angle d'incidence i_0 au minimum de déviation

$$i_0 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right).$$

Méthode 1. La méthode peut-être la plus intuitive consiste à dériver l'expression de $D(i)$ par rapport à i, pour aboutir à l'expression (1) ci-dessous. Le calcul peut s'avérer fastidieux, surtout si l'on ne connait pas la dérivée de arcsin... Il s'agit toutefois d'un bon exercice de calcul : à vous de jouer !

Méthode 2. Plus simple, mais nécessite de savoir différencier une relation (cf. plus tard dans l'année). Le calcul ci-dessous est mené pour la déviation définie en valeur absolue, ce qui ne change rien à la conclusion.

On commence par différencier la relation donnant la déviation D en fonction de i et r. On obtient

$$\mathrm{d}D = 2\mathrm{d}i - 4\mathrm{d}r.$$

L'expression de $\mathrm{d}r$ en fonction de i s'obtient en différenciant la troisième loi de Snell-Descartes en I :

$$\mathrm{d}i\cos i = n\mathrm{d}r\cos r, \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}r = \frac{\cos i}{n\cos r}\mathrm{d}i = \sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2 - n^2\sin^2 r}}\mathrm{d}i = \sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}\mathrm{d}i.$$

En remplaçant dans l'équation précédente

$$\mathrm{d}D = \left(2 - 4\sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}\right)\mathrm{d}i, \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 2 - 4\sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}. \tag{1}$$

Au minimum de déviation, cette dérivée s'annule : on cherche une valeur de i_0 telle que

$$2 = 4\sqrt{\frac{1-\sin^2 i_0}{n^2-\sin^2 i_0}}, \quad \text{ou encore} \quad n^2 - \sin^2 i_0 = 4 - 4\sin^2 i_0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin^2 i_0 = 4 - n^2.$$

Après passage à la racine, on ne retient que la solution positive car $i_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on obtient le résultat recherché

$$\boxed{i_0 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right).}$$