DS1 – Optique

Exercice 1 – Étude d'un réfractomètre

1. Le rayon lumineux arrive sur le dioptre **en incidence normale**, il n'est donc pas dévié.

2. Cf. Fig. 1.
Dans le triangle OAB, on a

$$\widehat{OAB} + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi, \quad \text{d'où} \quad \widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

D'autre part, en utilisant l'angle plat $\widehat{OAE}$, on a

$$\pi = \widehat{OAB} + \frac{\pi}{2} + i_1,$$

d'où finalement

$$\boxed{i_1 = \alpha.}$$

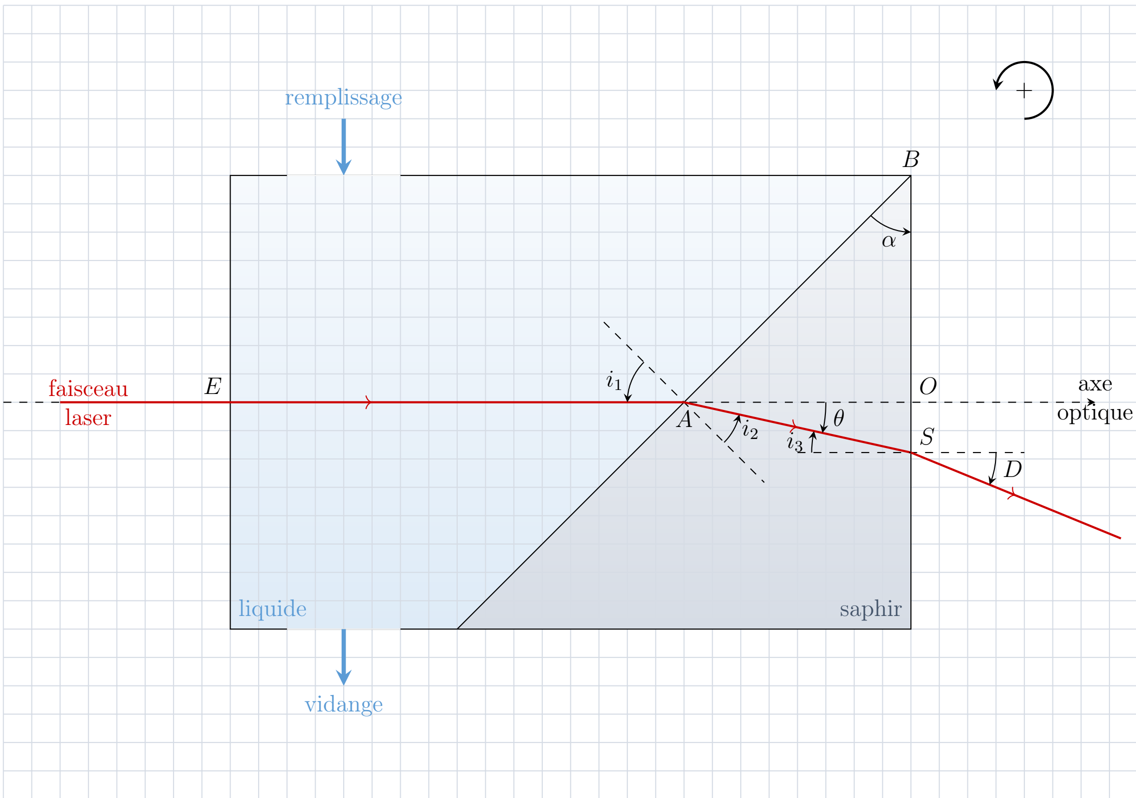


Figure 1 – Réfractomètre.

3. Cf. Fig. 1.
Le liquide analysé possède un indice a priori compris entre 1,33 et 1,5. Il est donc moins réfringent que le saphir : **le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre** ($i_2 < i_1$).

4. On a
$$i_1 = i_2 - \theta, \quad \text{d'où, avec } i_1 = \alpha, \quad \boxed{i_2 = \alpha + \theta.}$$
D'après la troisième loi de Snell-Descartes au niveau du dioptre liquide/saphir, on a aussi
$$n \sin i_1 = N \sin i_2, \quad \text{d'où, toujours avec } i_1 = \alpha, \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{N}\sin\alpha\right).}$$

5. Cette fois, le rayon passe d'un milieu plus réfringent (le saphir) à un milieu moins réfringent (l'air), donc **le rayon réfracté s'écarte de la normale au dioptre**.

6. Les angles θ et i_3 sont alternes-internes égaux, d'où
$$\boxed{i_3 = \theta.}$$
Avec l'indice de l'air pris égal à 1, la troisième loi de Snell-Descartes en S s'écrit
$$N \sin i_3 = \sin D.$$
On en déduit, avec $i_3 = \theta$,
$$\boxed{\sin D = N \sin\theta.}$$

7. Dans des conditions normales d'utilisation, l'indice du liquide est au plus de 1,5, ce qui reste inférieur à l'indice du saphir : **la réflexion totale est impossible en** A.

8. Dans le cas de l'interface saphir-air, la réflexion totale est a priori possible car le rayon passe d'un milieu très réfringent à un milieu moins réfringent. Dans le cas limite, $D = -\frac{\pi}{2}$, d'où, d'après la troisième loi de Snell-Descartes
$$\boxed{\theta_\ell = -\arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right).}$$

9. D'après les résultats de la question 4, on a dans le cas limite
$$\alpha + \theta_\ell = \arcsin\left(\frac{n_\ell}{N}\sin\alpha\right),$$
d'où (...)
$$\boxed{n_\ell = \frac{N\sin(\alpha+\theta_\ell)}{\sin\alpha}.}$$
En utilisant la formule d'addition du sinus et avec $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$, on obtient
$$n_\ell = N(\cos\theta_\ell + \sin\theta_\ell),$$
d'où finalement, avec $\cos\theta_\ell = \sqrt{1-\sin^2\theta_\ell}$,
$$\boxed{n_\ell = \sqrt{N^2-1} - 1.}$$
A.N. : $n_\ell \approx 0{,}44 < 1$: c'est impossible, **il n'y aura jamais réflexion totale** sur le dioptre saphir/air pour ce système.

10. D'après les résultats des questions 4 et 6, on a (...)
$$\boxed{n = \frac{N}{\sin\alpha}\sin\left(\alpha + \arcsin\left(\frac{\sin D}{N}\right)\right).}$$
A.N. : $n \approx 1{,}38$.

Exercice 2 – Collimateur à fibre

1. Pour qu'une réflexion totale soit possible sur le dioptre cœur/gaine, on doit avoir

$$\boxed{n_c > n_g.}$$

2. On a

$$\boxed{i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right).}$$

Le rayon est guidé si

$$\boxed{i > i_\ell.}$$

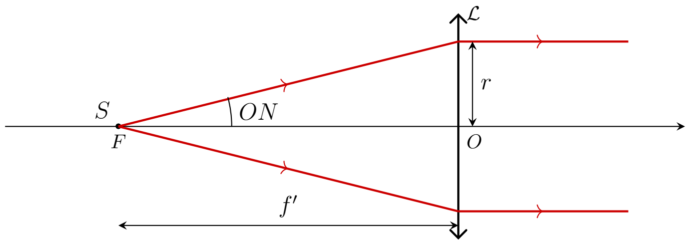
3. En partant de la condition de réflexion totale

$$\begin{aligned} i > i_\ell \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - r > i_\ell \\ &\Leftrightarrow \quad r < \frac{\pi}{2} - i_\ell \\ &\Leftrightarrow \quad \sin r < \cos i_\ell \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\theta < n_c\sqrt{1-\sin^2 i_\ell} \qquad \text{(Snell-Descartes)} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\theta < \boxed{\sqrt{n_c^2 - n_g^2} = \sin\theta_\ell.} \end{aligned}$$

Puisque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et que la fonction sinus est croissante sur cet intervalle, le rayon est bien guidé si $\theta < \theta_\ell$.

4. A.N. : $ON = 0{,}1224$.

5. En plaçant l'extrémité S de la fibre sur le foyer objet F d'une **lentille convergente**, le faisceau émergent de la lentille sera un faisceau parallèle.



6. On a

$$\tan\theta_\ell = \frac{r}{f'}.$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on a $\tan\theta_\ell \approx \theta_\ell$ et $\theta_\ell \approx ON$, d'où

$$\boxed{f' = \frac{r}{ON}.}$$

A.N. : $f' \approx 8{,}2\,\text{cm}$.

7. On peut schématiser la situation selon

$$S \overset{\mathcal{L}_1}{\rightarrow} S' \overset{\mathcal{L}_2}{\rightarrow} S''(\infty).$$

La relation de conjugaison de Descartes pour S et S' conjugués par la lentille $\mathcal{L}_1$ donne (...)

$$\overline{O_1S'} = \frac{\overline{O_1S} f_1'}{\overline{O_1S} + f_1'}.$$

Avec $\overline{O_1S} = 2f_1'$, on obtient finalement

$$\boxed{\overline{O_1S'} = \frac{2}{3} f_1'.}$$

8. À nouveau pour obtenir un faisceau de lumière parallèle en sortie de $\mathcal{L}_2$, il faut que l'image S' de S se forme **sur le foyer objet de** $\mathcal{L}_2$, soit

$$\boxed{\overline{O_2S'} = -f_2'.}$$

9. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\overline{SO_2} = \overline{SO_1} + \overline{O_1S'} + \overline{S'O_2} = -2f_1' + \frac{2}{3} f_1' + f_2',$$

d'où

$$\boxed{\overline{SO_2} = -\frac{4}{3} f_1' + f_2'.}$$

A.N. : $\overline{SO_2} = 43\,\text{mm}$, soit près de deux fois moins que le collimateur à une seule lentille.

10. Cf. Fig. 2.

11. Cf. Fig. 2.
On place la lentille $\mathcal{L}_2$ de sorte que son foyer objet coïncide avec S'.
Sur le schéma, on mesure la distance $\overline{SO_2}$, qui vaut environ 13 cm, soit en réalité

$$\overline{SO_2} \approx 43\,\text{mm}.$$

Ce résultat est cohérent avec celui de la question 9.

12. Cf. Fig. 2.

13. On considère la situation

$$A \overset{\mathcal{L}_3}{\rightarrow} A_1 \overset{\mathcal{L}_4}{\rightarrow} A'.$$

Les relations de conjugaison de Descartes pour chacune des deux lentilles s'écrivent

$$\frac{1}{\overline{O_3A_1}} - \frac{1}{\overline{O_3A}} = \frac{1}{f_3'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_4A'}} - \frac{1}{\overline{O_4A_1}} = \frac{1}{f_4'}.$$

Puisque les lentilles sont accolées, on a $O_3 = O_4 = O$. En additionnant les deux relations, on obtient

$$\cancel{\frac{1}{\overline{OA_1}}} - \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} - \cancel{\frac{1}{\overline{OA_1}}} = \frac{1}{f'_3} + \frac{1}{f'_4}.$$

Tout se passe donc comme si A' était l'image de A par une lentille unique, de centre optique O et dont la distance focale $f'_{\text{éq}}$ vérifie

$$\frac{1}{f'_{\text{éq}}} = \frac{1}{f'_3} + \frac{1}{f'_4}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_{\text{éq}} = \frac{f'_3 f'_4}{f'_3 + f'_4}.}$$

14. Sur le schéma, on remarque que la lentille $\mathcal{L}_3$ est convergente tandis que la lentille $\mathcal{L}_4$ est divergente. On a donc

$$f'_3 = +30{,}8\,\text{mm} \quad \text{et} \quad f'_4 = -49{,}7\,\text{mm}.$$

A.N. : $f'_{\text{éq}} \approx 81\,\text{mm}$.

15. On calcule l'incertitude-type sur la valeur indiquée par le fabricant :

$$u(f'_{\text{fab}}) = \frac{0{,}01 \times 80{,}3}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5\,\text{mm}.$$

N'ayant pas d'incertitude sur la valeur obtenue précédemment, on se résout à estimer le z-score :

$$Z = \frac{|80{,}3 - 81|}{0{,}5} = 1{,}4.$$

Le z-score est inférieur à 2 donc les deux valeurs sont **compatibles**.

Rq : Quelle que soit l'incertitude-type sur la valeur de $f'_{\text{éq}}$, l'écart normalisé que l'on aurait pu calculer en possession de cette incertitude aurait été inférieur au z-score, ce qui ne changerait pas la conclusion.

Rq : Il n'est pas étonnant de trouver une valeur légèrement différente puisque les lentilles ne sont visiblement pas superposées.

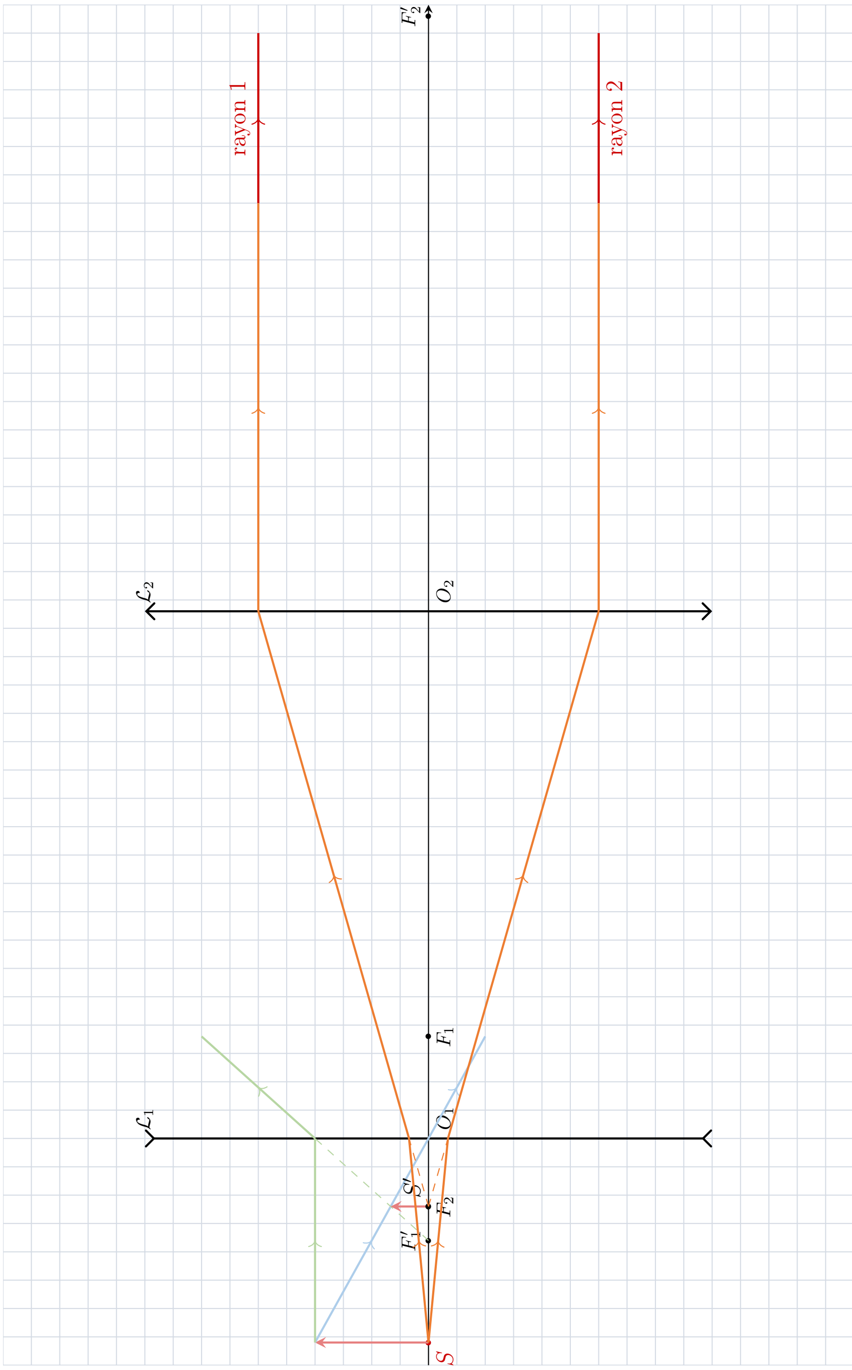
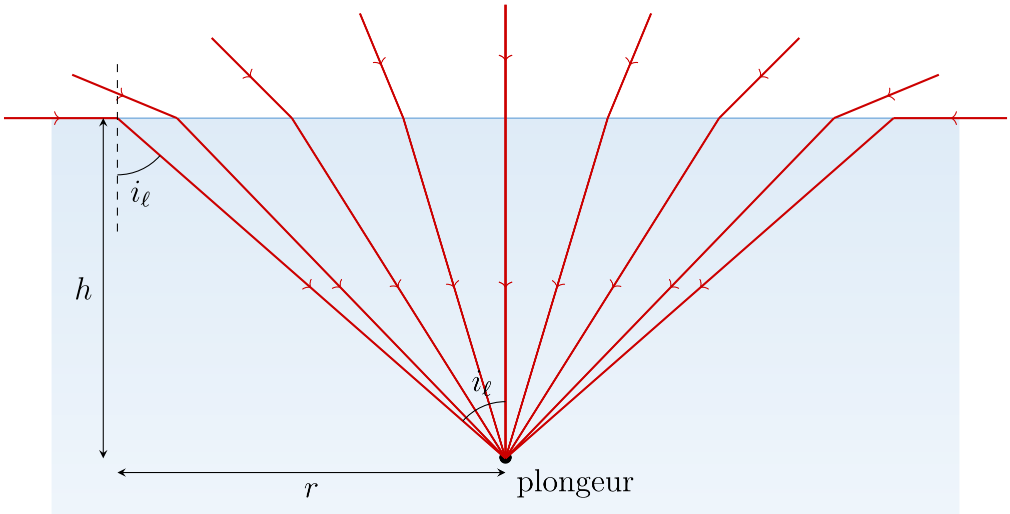


FIGURE 2 – Collimateur compact.

Exercice 3 – Fenêtre de Snell

1. Toute la lumière issue du ciel arrive au plongeur dans un cône dont le demi-angle au sommet correspond à l'angle maximal i_ℓ de réfraction pour le dioptre air-eau. En effet, l'eau étant plus réfringente que l'air, on peut schématiser la situation comme ci-dessous.



Toute la zone en dehors du cône lumineux est sombre car aucun rayon lumineux issu de l'air ne peut parvenir au plongeur avec une incidence $i > i_\ell$.

2. L'angle maximal de réfraction, noté i_ℓ, correspond à l'angle du rayon réfracté issu d'un rayon arrivant en incidence rasante sur le dioptre air-eau et défini par rapport à la normale au dioptre.

Tout d'abord, la troisième loi de Snell-Descartes pour le rayon limite s'écrit, avec l'indice de l'air pris égal à 1,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n \sin i_\ell,$$

où $n = 1{,}33$ est l'indice de réfraction de l'eau. On a donc

$$\sin i_\ell = \frac{1}{n}.$$

D'autre part, en notant h la profondeur du plongeur et r le rayon du disque lumineux, on a

$$\tan i_\ell = \frac{r}{h}, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{r}{\tan i_\ell}.$$

Avec $\tan i_\ell = \frac{\sin i_\ell}{\cos i_\ell}$ et $\cos i_\ell = \sqrt{1 - \sin^2 i_\ell}$, on obtient en remplaçant $\sin i_\ell$ par son expression en fonction de n :

$$\boxed{h = r\sqrt{n^2 - 1}.}$$

Pour faire l'application numérique, il est nécessaire de connaitre la taille du disque lumineux, ce qui est possible en utilisant la tortue comme étalon de longueur. On suppose que la tortue fait environ 1 m de longueur et qu'elle nage près de la surface. Sur la photo, on

mesure la tortue de la tête à la queue et on trouve 1,4 cm. Sur la photo, le diamètre du disque lumineux est d'environ 14 cm. On en déduit $r = 5\,\mathrm{m}$.
L'application numérique donne finalement :

$$\boxed{h \approx 4{,}4\,\mathrm{m}.}$$

Cette profondeur est raisonnable : elle est tout à fait atteignable par un plongeur, en apnée comme en bouteille.