Chapitre E2 – Circuits du premier ordre

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
→ Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série.
→ Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans un circuit RL.
→ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.

Questions de cours

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur, ou par l'intensité du courant traversant une bobine.
→ Résoudre ces équations le cas d'une charge ou d'une décharge.
→ Justifier par un raisonnement énergétique la continuité de la tension aux bornes du condensateur, de l'intensité du courant traversant une bobine.
→ Donner la valeur du temps caractéristique du régime transitoire pour un circuit RC ou un circuit RL.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC ou le circuit RL.

Plutôt que des questions de cours, il s'agit ici davantage de méthodes qu'il faut être capable de mettre en œuvre rapidement. Inutile d'apprendre par cœur les résultats, sauf les expressions des temps caractéristiques qui, elles, sont à connaitre par cœur.

Documents

Document 1 – Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

On s'intéresse à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, vérifiée par $x(t)$, de la forme :

$$x + \tau\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X_1, \qquad \text{ou, écrite sous sa forme canonique,} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = \frac{X_1}{\tau}, \tag{1}$$

où τ et X_1 sont des constantes. Si X_0 est la valeur de $x(t)$ pour $t = 0$, on cherche l'unique solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = X_0$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{x}{\tau} = \dfrac{X_1}{\tau}, \\ x(0) = X_0. \end{cases}$$

1. On commence par résoudre l'**équation homogène** :

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = 0.$$

   La solution générale de l'équation homogène est

   $$x_h(t) = Ae^{-t/\tau}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. On cherche ensuite une **solution particulière**. Le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante $x_p(t) = B$, avec $B \in \mathbb{R}$. On injecte cette solution dans l'équation différentielle :

   $$0 + \frac{B}{\tau} = \frac{X_1}{\tau} \quad \text{d'où} \quad x_p(t) = B = X_1.$$

3. L'équation différentielle (1) est linéaire, la **solution générale** est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière :

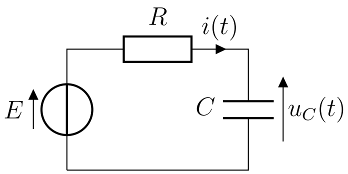
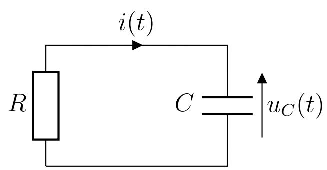
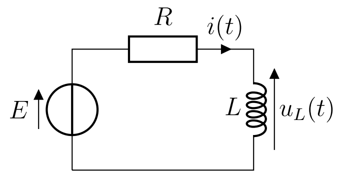
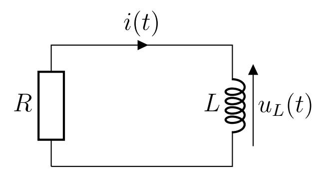
   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-t/\tau} + X_1.$$

4. On détermine finalement la constante A en utilisant la **condition initiale** :

   $$x(0) \underset{\text{sol°}}{=} A + X_1 \underset{\text{C.I.}}{=} X_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = X_0 - X_1.$$

5. L'**unique solution** de l'équation (1) vérifiant $x(0) = X_0$ est :

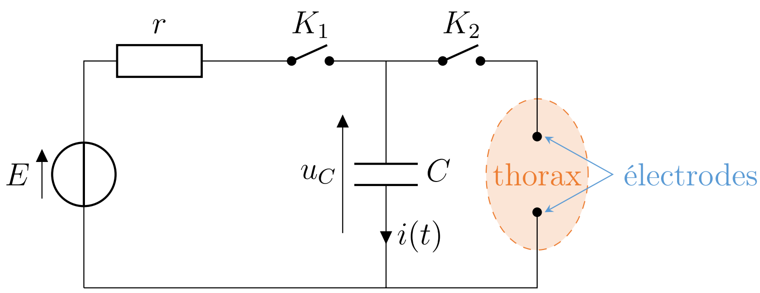
   $$\boxed{x(t) = (X_0 - X_1)e^{-t/\tau} + X_1.}$$

Circuit	**RC**		**RL**	
Schéma				
Grandeur électrique	$u_C(t)$		$i(t)$	
Temps caractéristique	$\tau = RC$		$\tau = \dfrac{L}{R}$	
Équation différentielle	$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$	$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{E/R}{\tau}$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = 0$
Condition initiale	$u_C(t=0) = 0$	$u_C(t=0) = E$	$i(t=0) = 0$	$i(t=0) = \dfrac{E}{R}$
Solution	$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	$u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$	$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	$i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$
Bilan énergétique	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right) = \mathcal{P}_\mathrm{g}$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) = \mathcal{P}_\mathrm{g}$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) = 0$
Énergie stockée	$\dfrac{1}{2}Cu_C^2$		$\dfrac{1}{2}Li^2$	

Applications

Application 1 – Défibrillateur (1)

Le défibrillateur automatisé externe (DAE) est un dispositif médical qui limite significativement le risque de mortalité en cas d'arrêt cardiaque, au moyen de décharges électriques délivrées au cœur. Le DAE peut être modélisé selon le montage représenté ci-dessous.



Le fonctionnement du DAE peut se décomposer en deux étapes :

- la **charge**, où K_1 est fermé et K_2 est ouvert : le condensateur ($C = 470\,\mu\mathrm{F}$) du DAE est chargé par un générateur haute-tension ($E = 1500\,\mathrm{V}$) ;
- la **décharge**, où K_2 est fermé et K_1 est ouvert : le condensateur est déchargé pour produire le choc électrique reçu par le patient.

1. On suppose que K_1 est fermé depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint (K_2 est ouvert). Représenter le schéma électrique simplifié équivalent au DAE dans ce cas et en déduire l'expression de la tension u_C en fonction de E.
2. Exprimer, puis calculer l'énergie $\mathcal{E}_{C,0}$ alors stockée par le condensateur.

Application 2 – Défibrillateur (2)

À l'instant $t = 0$, l'opérateur ferme l'interrupteur K_2 (K_1 est ouvert) pour administrer le choc électrique au patient. Lors de la décharge, on assimile le thorax du patient à un conducteur ohmique de résistance $R = 50\,\Omega$.

1. Faire un schéma électrique équivalent au DAE lors de la décharge.
2. Utiliser la loi des mailles pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, pour $t > 0$.

3. Donner la dimension de RC. Faire l'application numérique.
4. Que devient cette équation en régime permanent ? En déduire les valeurs de $u_C(t)$ et $i(t)$ en régime permanent.
5. Retrouver ces valeurs à partir d'un circuit électrique équivalent.

Application 3 – Défibrillateur (3)

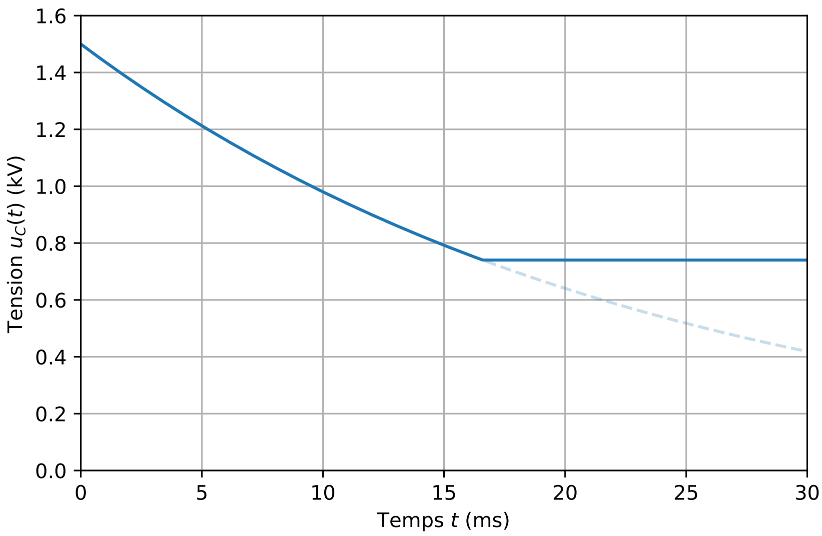
1. On s'intéresse au régime transitoire. Donner la solution générale de cette équation.
2. Que peut-on dire de la tension $u_C(t)$ lors de la fermeture de K_1 à l'instant $t = 0$? En déduire la condition initiale vérifiée par $u_C(t)$ en $t = 0$.
3. Donner la solution $u_C(t)$.

Application 4 – Défibrillateur (4)

1. Représenter graphiquement la solution $u_C(t)$ trouvée précédemment.
2. Donner la valeur du rapport $u_c(\tau)/E$. Faire apparaitre graphiquement le temps caractéristique τ associé à la décharge du condensateur.
3. Exprimer l'instant t_d à partir duquel le condensateur est complètement déchargé, c'est-à-dire le temps à partir duquel la tension à ses bornes est inférieure à $1\,\%$ de sa valeur initiale.

Application 5 – Défibrillateur (5)

En réalité, l'interrupteur K_2 s'ouvre automatiquement pour interrompre la décharge quand une énergie électrique $W = 400\,\mathrm{J}$ a été délivrée au patient. L'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors d'un choc est représentée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement la date t_1 à laquelle s'arrête la décharge partielle du condensateur et la valeur de la tension $u_C(t_1)$ à cette date.
2. À partir de la solution obtenue précédemment, exprimer $u_C(t_1)$ et t_1 à l'aide d'un raisonnement énergétique. Faire les applications numérique. Commenter.
3. À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que l'intégralité de cette énergie est dissipée par effet Joule.

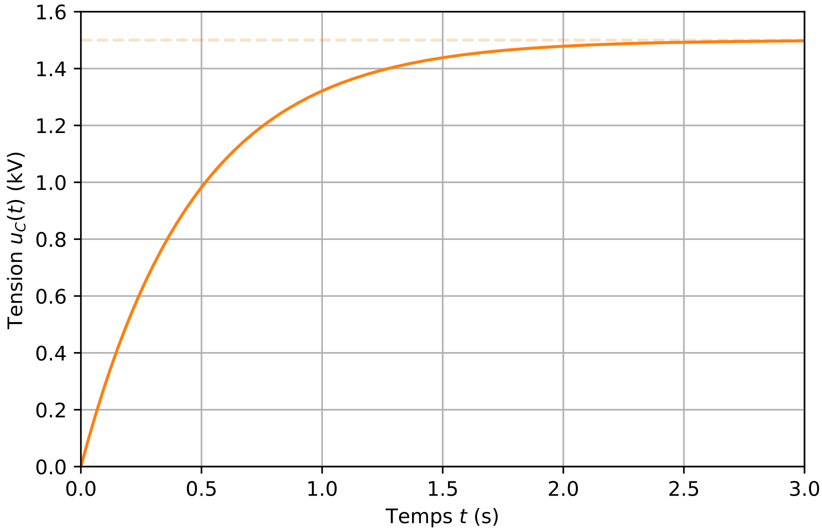
Application 6 – Défibrillateur (6)

On s'intéresse maintenant à la charge du condensateur. À l'instant t_0 on ferme l'interrupteur K_1 (K_2 est ouvert).

1. Représenter le schéma électrique équivalent au DAE lors de la charge.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.
3. Résoudre cette équation, en supposant que le condensateur était complètement déchargé avant la fermeture de l'interrupteur K_1. On choisira la nouvelle origine des temps à $t = t_0$.

L'évolution de la tension aux bornes du condensateur pendant la charge est représentée ci-dessous.

4. Avec deux méthodes différentes, déterminer graphiquement le temps caractéristique τ' de la charge du condensateur.
5. En déduire la valeur de la résistance r.



Application 7 – Défibrillateur (7)

À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que lors de la charge du condensateur, le générateur doit fournir deux fois plus d'énergie que celle qui est stockée dans le condensateur complètement chargé. Que devient l'autre moitié de l'énergie fournie par le générateur ?