

# Chapitre E3 – Circuits du deuxième ordre

## Plan du cours

- I Approche expérimentale et numérique**
- II Circuit LC : modèle de l'oscillateur harmonique**
  - II.1 Équation différentielle
  - II.2 Résolution
  - II.3 Conservation de l'énergie
- III Circuit RLC, modèle de l'oscillateur amorti**
  - III.1 Équation différentielle
  - III.2 Différents régimes de fonctionnement
  - III.3 Résolution d'une équation différentielle du second ordre
  - III.4 Bilan énergétique

## Ce qu'il faut savoir et savoir faire

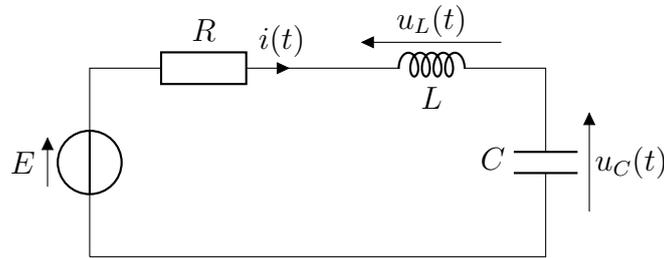
- Établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit LC ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales.
- Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit RLC afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.
- Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série.

## Questions de cours

- Établir l'équation différentielle vérifiée par une des grandeurs électriques dans un circuit LC (App. 1).
- Résoudre cette équation pour des conditions initiales données.
- À partir de l'expression analytique d'une solution donnée par le colleur, représenter graphiquement l'évolution temporelle de cette solution, en faisant apparaître la période, l'amplitude et la valeur moyenne, ainsi que leur lien avec l'expression analytique.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur d'un RLC série et la résoudre.
- Écrire, sans démonstration, la forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti. Lister les différentes formes que peuvent prendre les solutions en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Relier la durée du régime transitoire aux racines du polynôme caractéristique.

## Documents

### Document 1 – Résolution d'une équation différentielle du second ordre



Dans le circuit RLC série représenté ci-dessus, la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur, sa charge électrique  $q(t)$  et l'intensité du courant  $i(t)$  vérifient l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = \text{cste}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Prenons l'exemple de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  dans un circuit RLC série avec source. Sous sa forme canonique, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

### Solution de l'équation homogène

Comme pour le premier ordre, on commence par résoudre l'équation homogène :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0,$$

dont les solutions sont de la forme  $e^{rt}$ , avec  $r \in \mathbb{C}$  racine du **polynôme caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0, \quad \text{de discriminant} \quad \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2).$$

On peut alors distinguer trois régimes suivant le signe de  $\Delta$  :

- si  $\Delta > 0$ , soit  $Q < \frac{1}{2}$ , le polynôme caractéristique admet deux racines réelles  $r_{\pm}$  :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} < 0.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$u_{C,h}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

Ce régime correspond à un **amortissement fort** : on parle alors de régime **apériodique**.

- si  $\Delta = 0$ , soit  $Q = \frac{1}{2}$ , le polynôme caractéristique admet une racine double  $r$  :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0 < 0.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$u_{C,h}(t) = (At + B)e^{rt}, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

On parle alors de régime **critique**.

- si  $\Delta < 0$ , soit  $Q > \frac{1}{2}$ , le polynôme caractéristique admet deux racines complexes  $r_{\pm}$  :

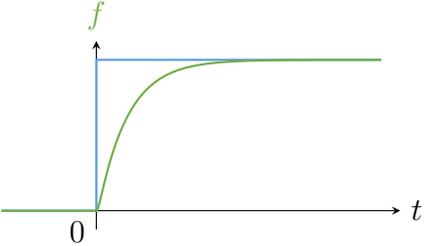
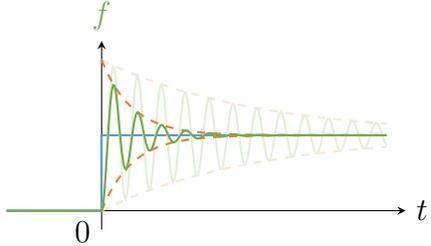
$$r_{\pm} = -\mu \pm j\Omega, \text{ avec } \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$u_{C,h}(t) = e^{-\mu t}(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = U_m e^{-\mu t} \cos(\Omega t + \varphi),$$

où  $(A, B)$  ou  $(U_m, \varphi)$  sont des couples de constantes à déterminer. Ce régime correspond à un **amortissement faible** : on parle alors de régime **pseudo-périodique**, de **pseudo-période**  $T = 2\pi/\Omega$  et **pseudo-pulsation**  $\Omega$ , différente de  $\omega_0$ .

Dans le cas où l'amortissement est très faible, c'est-à-dire pour  $Q \gg 1$ , la pseudo-pulsation est très proche de la pulsation propre ( $\Omega \approx \omega_0$ ) et le nombre d'oscillations pendant le régime transitoire est de l'ordre de  $Q$ .

Facteur de qualité	$Q < \frac{1}{2}$	$Q = \frac{1}{2}$	$Q > \frac{1}{2}$
Régime	apériodique	critique	pseudo-périodique
Racines du polynôme $r_{\pm}$	$-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$	$-\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$-\mu \pm j\Omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Solution de l'équation homogène	$Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$	$(At + B)e^{rt}$	$e^{-\mu t}(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$
Durée du régime transitoire	quelques $\frac{1}{ r_+ }$	quelques $\frac{1}{ r }$	quelques $\frac{1}{\mu}$
Évolution temporelle (échelon)			

### Solution particulière

Avec un second membre constant, on cherche une solution particulière constante. Ici,  $u_{C,p}(t) = E$  convient.

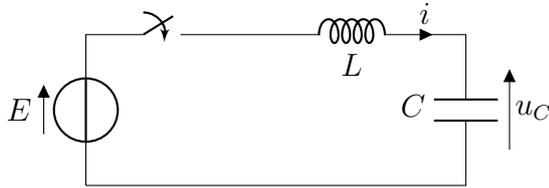
### Utilisation des conditions initiales

Comme pour le premier ordre, la **solution générale** s'obtient en sommant la solution de l'équation homogène et la solution particulière. Les coefficients  $A$  et  $B$  (où  $U_m$  et  $\varphi$ ) s'obtiennent finalement en utilisant les conditions initiales avec la continuité des intensité parcourant la bobine et tension aux bornes du condensateur. Ici :

- la tension aux bornes du condensateur est continue :  $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$  ;
- l'intensité du courant parcourant la bobine est continue :  $\frac{du_C}{dt}(t = 0^-) = \frac{du_C}{dt}(t = 0^+)$ .

## Applications

### Application 1 – Équation différentielle associée à un circuit LC série



On considère le circuit représenté ci-contre, composé d'un générateur idéal de tension de f.é.m.  $E$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$  pour  $t > 0$ .
2. Donner la dimension de  $\sqrt{LC}$ .
3. Comment pourrait-on obtenir l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur  $q(t)$ ? Et par l'intensité du courant  $i(t)$ ?

### Application 2 – Solution oscillante

Les solutions de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique s'écrivent sous la forme :

$$u_C(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

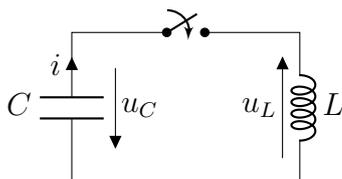
1. Vérifier que la fonction  $u_C(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation homogène de l'oscillateur harmonique.
2. Montrer que la deuxième forme est aussi solution et préciser la relation entre  $\varphi$  et  $\psi$ .
3. Montrer que la dernière forme est équivalente à la première, puis à la deuxième en utilisant les formules d'addition des cosinus et sinus.

### Application 3 – Détermination des conditions initiales

On reprend la situation décrite dans l'application 1. On suppose qu'avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur est déchargé et que l'intensité du courant est nulle.

1. Justifier que l'intensité  $i(t)$  et la tension  $u_C(t)$  sont continues.
2. En déduire les deux conditions initiales portant sur  $u_C(t)$  et sa dérivée première.
3. Donner l'expression de la solution  $u_C(t)$ .
4. Représenter graphiquement  $u_C(t)$  et faire apparaître la période  $T$ , l'amplitude  $U_1$  et la valeur moyenne de ce signal  $U_0$ . Exprimer ces paramètres en fonction de  $E$ ,  $L$  et  $C$ .

### Application 4 – Conservation de l'énergie

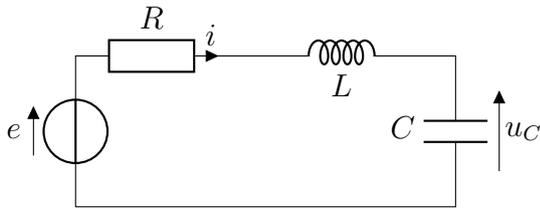


On considère le circuit représenté ci-contre. Le condensateur est initialement chargé sous une tension  $E$ . À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

1. Donner l'expression de la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  et de l'intensité du courant  $i(t)$  pour  $t > 0$ .

2. En déduire l'expression de l'énergie  $\mathcal{E}_C(t)$  stockée par le condensateur et celle  $\mathcal{E}_L(t)$  emmagasiné par la bobine en fonction du temps.
3. Les représenter sur un même graphe et montrer qu'à tout instant  $\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}_0$ , où  $\mathcal{E}_0$  est l'énergie stockée par le condensateur avant la fermeture de l'interrupteur.

### Application 5 – Équation différentielle de l'oscillateur amorti



On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. Le générateur impose un échelon de tension parfait, c'est-à-dire :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ E & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$  pour  $t > 0$ .
2. L'écrire sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ .

3. Quelle est la dimension de  $Q$  ?

### Application 6 – Résistance critique

On reprend le circuit de l'application 5 et on donne  $L = 1,0 \text{ mH}$  et  $C = 47 \text{ nF}$ .

1. Exprimer et calculer la valeur de la résistance critique  $R_c$  correspondant au régime critique.
2. Donner la condition sur  $R$  pour laquelle le régime transitoire présente des oscillations.

### Application 7 – Solutions de l'oscillateur amorti

On reprend la situation de l'application 5 avec les valeurs des composants de l'application 6.

1. Donner, en les justifiant, les deux conditions initiales portant sur  $u_C(t)$  et sa dérivée première.
2. Donner l'expression de  $u_C(t)$  dans le cas où  $R = 2R_c$ .
3. En déduire l'expression de  $i(t)$ .
4. Représenter graphiquement  $u_C(t)$ .
5. Faire de même pour  $R = R_c/10$ .