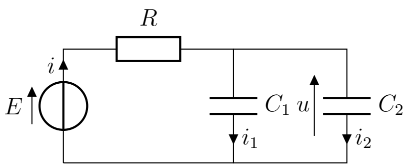
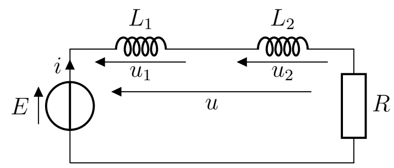
TD E2 – Circuits du premier ordre

★☆☆ Exercice 1 – Temps caractéristiques

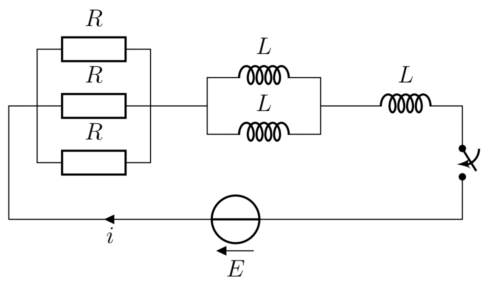
1. On considère un circuit RC série. Montrer que le produit RC est homogène à un temps. Faire de même pour un circuit RL série et le quotient L/R.
2. On considère maintenant un circuit contenant une bobine et un condensateur. Quelle combinaison des paramètres L et C permet d'obtenir une grandeur homogène à un temps ?

★☆☆ Exercice 2 – Associations de dipôles

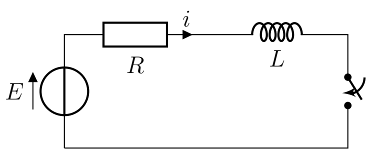




1. Pour chacun des deux circuits représentés ci-dessus, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u (resp. l'intensité i) et montrer que les deux condensateurs (resp. bobines) peuvent se ramener à un condensateur (resp. une bobine) unique de capacité $C_{\text{éq}}$ (resp. d'inductance $L_{\text{éq}}$) que l'on exprimera en fonction de C_1 et C_2 (resp. L_1 et L_2).
2. Faire de même dans le cas de deux condensateurs montés en série, puis de deux bobines en parallèle.
3. On considère le circuit représenté ci-contre. L'interrupteur est initialement ouvert depuis un temps très long. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
   Déterminer l'évolution de l'intensité $i(t)$ traversant le générateur pour $t > 0$ et calculer le temps caractéristique pour $R = 6{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 30\,\mathrm{mH}$.



★☆☆ Exercice 3 – Comportement aux limites



Le circuit représenté ci-contre est alimenté par une source de tension continue de f.é.m. E et de résistance interne négligeable devant R. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

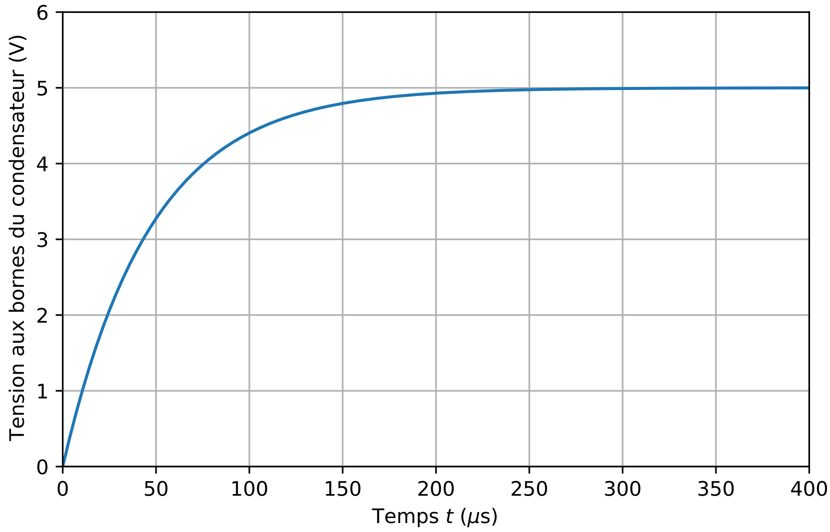
Sans calcul, déterminer, parmi les expressions ci-dessous, celle qui correspond à l'intensité du courant $i(t)$. Justifier pourquoi les autres expressions ne peuvent convenir.

1. $i(t) = \frac{E}{2R}\left(1 - e^{-\frac{t}{RL}}\right)$
2. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right)$
3. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right)$
4. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$
5. $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$
6. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{R}{L}t}\right)$

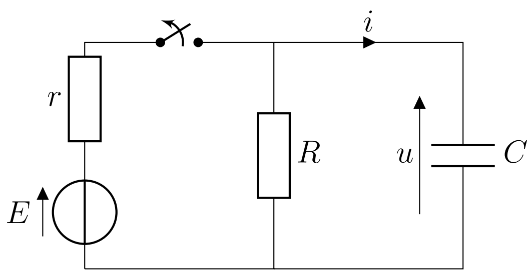
★☆☆ Exercice 4 – Étude d'un circuit RC

On étudie un circuit RC série, alimenté par un GBF en continu, et on observe la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. On obtient l'oscillogramme ci-dessous. Dans le circuit, les composants utilisés ont les valeurs suivantes : $R = 50\,\Omega$ et $C = 470\,\text{nF}$.

1. Exprimer et calculer le temps caractéristique $\tau_{\text{théo}}$ d'évolution de la tension aux bornes du condensateur.
2. Déterminer graphiquement et avec deux méthodes différentes le temps caractéristique τ_{exp}. Distinguer le régime permanent du régime transitoire.
3. D'où vient la différence constatée entre la valeur théorique et la valeur expérimentale ? Déterminer la valeur du composant « manquant ».



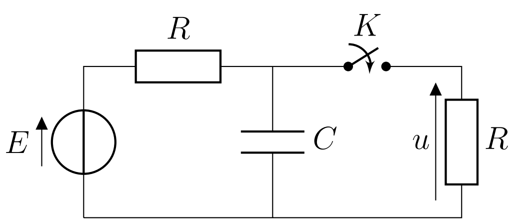
★☆☆ Exercice 5 – Décharge d'un condensateur



E est une tension continue. L'interrupteur étant fermé depuis « très longtemps », on l'ouvre à la date $t = 0$.

Déterminer $u(t)$ et $i(t)$.

★★☆ Exercice 6 – Circuit RC à deux mailles



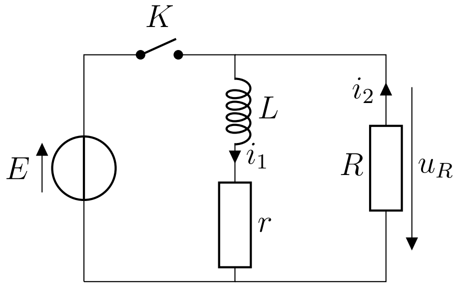
Le circuit représenté ci-contre est alimenté par une source idéale de tension. L'interrupteur K est ouvert depuis « très longtemps ». On le ferme à l'instant $t = 0$.

Déterminer l'expression de $u(t)$ et tracer son allure.

★★☆ Exercice 7 – Clôture électrique

Pour empêcher des animaux de sortir d'un enclos, on peut choisir d'utiliser une clôture électrique. Cela consiste à générer périodiquement des impulsions de haute tension dans un fil. Pour ce faire, on modélise le système par le circuit représenté ci-contre.

Le générateur est une batterie de voiture de tension $E = 12\,\mathrm{V}$, qui possède une charge totale $Q = 45\,\mathrm{A \cdot h}$. K est un relai (un interrupteur commandé par une horloge) qui s'ouvre et se ferme périodiquement avec une période $T \sim 1\,\mathrm{s}$. La bobine d'inductance $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$ et de résistance interne $r = 10\,\Omega$ est connectée au fil de la clôture, modélisé par une résistance $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$.

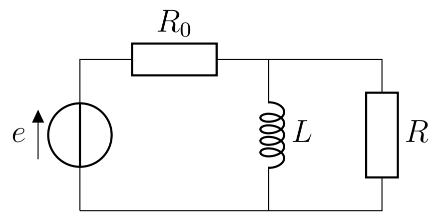


1. Pour chaque position du relai K, déterminer les différentes grandeurs électriques en régime permanent.
2. Pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[$ où K est fermé, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ et la résoudre. On supposera qu'à $t = 0$, la bobine n'a pas stocké d'énergie.
3. Pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[$, le relai est ouvert. Déterminer l'expression de $i_1(t)$.
4. Exprimer alors la tension $u_R(t)$ et montrer qu'elle peut prendre une valeur supérieure à E, que l'on estimera. Déterminer la durée Δt pour laquelle $u_R > 10E$.
5. Représenter l'allure de $u_R(t)$ et de $i_1(t)$ pour $t \in [0, 2T[$.
6. Estimer enfin le temps de fonctionnement T_{tot} de la batterie avec un tel système.
7. Proposer une modification du comportement du relai permettant d'augmenter l'autonomie du système, tout en continuant à produire une surtension par seconde.

★★★ Exercice 8 – Circuit RL parallèle

On considère le circuit représenté ci-contre, soumis à un échelon de tension en $t = 0$, de sorte que la tension aux bornes du générateur vaut

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ E & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$



Déterminer l'évolution des différentes grandeurs électriques et les représenter graphiquement. Quel est le temps caractéristique d'évolution de ce circuit ?

★★☆ Exercice 9 – Résistance de fuite d'un condensateur

On débranche un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{pF}$ initialement chargé sous une tension $E = 10\,\mathrm{V}$. Au bout de $\Delta t = 2\,\mathrm{min}$, la tension entre ses bornes n'est plus que de $0{,}1E$.

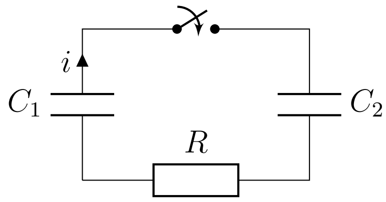
1. Proposer une explication à cette décharge spontanée du condensateur.

2. Justifier qualitativement qu'un condensateur qui se décharge spontanément peut se modéliser par l'ajout d'une résistance en parallèle d'un condensateur idéal. Cette résistance R_f est appelée résistance de fuite.
3. Exprimer, puis calculer l'ordre de grandeur de la résistance de fuite du condensateur.

★★★ Exercice 10 – Décharge d'un condensateur dans un autre

On considère le circuit représenté ci-contre. Le condensateur de capacité C_1 porte une charge Q_0 sur l'armature du haut. Celui de capacité C_2 est déchargé.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$.
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle.
3. Déterminer les expressions des charges Q_1 et Q_2 portées par les armatures du haut de chacun des deux condensateurs en régime permanent.
4. Exprimer l'énergie du système $\mathcal{E}_0$ du système avant la fermeture de l'interrupteur (*i.e.* l'énergie stockée par tous les dipôles du circuit). Déterminer l'énergie $\mathcal{E}_\infty$ en régime permanent. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_0$.
5. Sous quelle forme l'énergie est-elle dissipée ? Retrouver l'expression de $\Delta\mathcal{E}$ par un calcul direct.
6. L'expression de $\Delta\mathcal{E}$ ne dépend pas de R : que devient l'énergie perdue si R est nulle ?

Coups de pouce

Ex. 1 1. On peut utiliser l'équation différentielle, mais il peut être formateur de retrouver les dimensions de R, C et L en fonction des dimensions de base. On connait désormais toutes les relations nécessaires !
Ex. 2 2. Dans le circuit RC_1C_2, l'intensité du courant peut s'exprimer de deux façons différentes dans, ce qui aboutit à deux équation différentielles. En les sommant astucieusement, le résultat apparait... 3. On commencera évidemment par simplifier le circuit en profitant des lois d'associations de dipôles obtenues précédemment.
Ex. 3 Utiliser les tests de vraisemblance : homogénéité, conditions initiales, comportement aux limites, etc.
Ex. 4 2. Méthode de la tangente à l'origine et méthode des 63 %.
Ex. 7 1. Représenter les circuits équivalents. 6. Quelle est l'énergie fournie par la batterie sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right[$? Et sur $\left[\frac{T}{2}, T\right[$? Comparer les temps caractéristiques lors de ces deux phases à leurs durées pour simplifier les calculs.
Ex. 8 La difficulté ici vient du fait que l'on ne précise s'il faut déterminer d'abord $u_L(t)$ ou $i_L(t)$. Il sera peut-être nécessaire de tâtonner un peu.
Ex. 10 Attention aux conventions !

✓ Éléments de correction

Ex. 1 1. $[RC] = \left[\frac{L}{R}\right] = \mathrm{T}$; 2. $\left[\sqrt{LC}\right] = \mathrm{T}$.

Ex. 2 1. $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$, $L_{\text{éq}} = L_1 + L_2$; 2. $\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, $\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$; 3. $i(t) = \frac{3E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \frac{9L}{2R} \approx 23\,\mu\text{s}$.

Ex. 3 expression 4.

Ex. 4 1. $\tau_{\text{théo}} = RC = 23{,}5\,\mu\text{s}$; 2. $\tau_{\text{exp}} \approx 47\,\mu\text{s}$; 3. $R_{\text{GBF}} = \frac{\tau_{\text{exp}}}{C} - R = 50\,\Omega$.

Ex. 5 $u(t) = \frac{RE}{R+r}e^{-t/\tau}$, $i(t) = -\frac{E}{R+r}e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$.

Ex. 6 $u(t) = \frac{E}{2}\left(e^{-t/\tau} + 1\right)$, $\tau = RC/2$.

Ex. 7 1. K ouvert : $i_1 = i_2 = 0$, $u_R = 0$; K fermé : $u_R = -E$, $i_1 = E/r$, $i_2 = -E/R$; 2. $\frac{1}{\tau}\frac{E}{r} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau}$, $i_1(t) = \frac{E}{r}(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau = \frac{L}{r}$; 3. $i_1(t) = \frac{E}{r}e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau'}$, $\tau' = \frac{L}{R+r}$; 4. $\Delta t = \tau' \ln\left(\frac{R}{10r}\right) = 2{,}3\,\text{ms}$; 6. $\mathcal{E}_T \approx \frac{E^2}{R}\frac{T}{2} + \frac{E^2}{r}\left(\frac{T}{2} - \tau\right)$, $T_{\text{tot}} = \frac{QE}{\mathcal{E}_T}T \approx 3{,}9\,\text{jours}$.

Ex. 8 $i_L(t) = \frac{E}{R_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \frac{L(R+R_0)}{RR_0}$.

Ex. 9 3. $R_{\text{f}} = \frac{\Delta t}{C \ln 10} = 520\,\text{G}\Omega$.

Ex. 10 1. $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$, $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}$; 2. $i(t) = \frac{Q_0}{RC_1}e^{-t/\tau}$; 3. $Q_1 = \frac{C_1}{C_1+C_2}Q_0$, $Q_2 = \frac{C_2}{C_1+C_2}Q_0$; 4. $\mathcal{E}_0 = \frac{Q_0^2}{2C_1}$, $\mathcal{E}_\infty = \frac{Q_0^2}{2(C_1+C_2)}$, $\Delta\mathcal{E} = -\frac{C_2Q_0^2}{2C_1(C_1+C_2)} < 0$.

Exercice 11 – Résolution de problème

La résolution de ce problème nécessite de connaitre la méthode de variation de la constante.

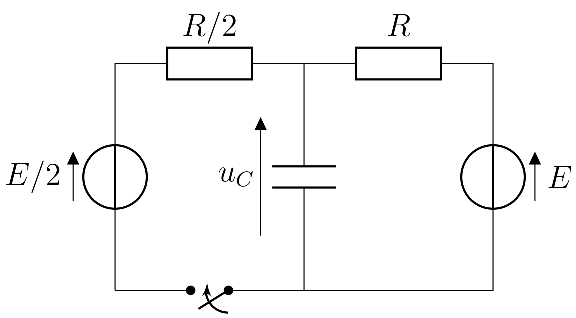
Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes émet, s'il en détecte une à l'instant $t = 0$, un courant $i_0(t) = I_0 e^{-t/t_1}$, avec I_0 de l'ordre de $10\,\mu\text{A}$ et t_1 de l'ordre de $100\,\mu\text{s}$. On cherche à détecter les particules grâce à l'apparition d'un pic de tension de l'ordre de $100\,\text{mV}$ au bout d'une durée de l'ordre de t_1. Pour cela, on dispose d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C.

Proposer un montage et des valeurs numériques permettant d'obtenir un détecteur convenable.

Exercice 12 – Condensateur alimenté par deux générateurs – Oral CCP

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C.
2. Résoudre cette équation.
3. Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à $1\,\%$ près.
4. Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.



python Exercice 13 – Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est une méthode qui permet d'intégrer numériquement une équation différentielle, c'est-à-dire de calculer les valeurs de la fonction sur laquelle porte l'équation différentiel en certains instants particuliers. L'intérêt des méthodes d'intégration numériques prend tout son sens lorsque l'équation ne présente pas de solution analytique, comme cela arrive souvent dans de nombreux domaines.

Pour illustrer le principe de la méthode, on s'intéresse à un simple circuit RC série alimenté par un GBF. On souhaite comparer la résolution analytique à la résolution numérique afin d'explorer quelques limites de la méthode d'Euler, avant de la mettre en œuvre sur des problèmes plus complexes.

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{e(t)}{\tau} - \frac{u(t)}{\tau},$$

où $e(t)$ est la tension aux bornes du GBF et τ une constante que l'on exprimera en fonction des caractéristiques des dipôles utilisés. On notera $u_0 = u(t_0)$ la condition initiale associée au problème.

Pour résoudre l'équation numériquement, il est nécessaire de la **discrétiser**. Pour cela, on choisit un pas de temps δt et on ne s'intéresse plus à l'obtention de la fonction u, mais seulement aux valeurs $u_k = u(t_k)$ aux instants $t_k = t_0 + k\delta t$, avec k un entier.

2. En remarquant que, pour un pas de temps suffisamment petit, la dérivée temporelle de u à l'instant $t_k = t_0 + k\delta t$ peut être approximée à l'aide du taux d'accroissement :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{u(t_k + \delta t) - u(t_k)}{\delta t},$$

donner l'expression de $u(t_k + \delta t)$ en fonction de $u(t_k)$, $e(t_k)$, δt et τ.

3. En déduire qu'il est possible d'estimer numériquement $u(t_k)$ à partir de la condition initiale u_0, en calculant successivement les termes de la suite :

$$u_{k+1} = \left(1 - \frac{\delta t}{\tau}\right) u_k + \frac{\delta t}{\tau} e_k.$$

Le programme `tdE2-euler.py` utilise la méthode d'Euler explicite pour estimer $u(t)$.

4. Sur le même graphe, représenter la solution exacte de l'équation différentielle dans le cas où $e(t) = 0$ et $u_0 = 1\,\mathrm{V}$. Commenter l'effet du pas de temps `dt` utilisé pour la résolution numérique. Pourquoi ne peut-on pas utiliser un pas de temps aussi faible que l'on veut ?

5. Étudier l'allure de la tension aux bornes du condensateur pour différents signaux produits avec le GBF.

6. Le circuit RC série est notamment utilisé pour lisser un signal, c'est-à-dire éliminer des pics de tension.

   Mettre en évidence cette propriété à l'aide d'un signal $e(t)$ bien choisi et d'un temps caractéristique τ adapté.