TD E3 – Circuits du deuxième ordre

★☆☆ Exercice 1 – Résolution d'équations différentielles

L'une des grandeurs électriques $x(t)$ d'un circuit vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 sans second membre.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. L'écrire sous sa forme canonique.

2. La résoudre dans les cas suivants :

2.a. $x(0) = x_0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$;

2.b. $x(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$;

2.c. $x(0) = x_0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$.

3. Faire de même dans le cas où l'équation différentielle possède un second membre $\omega_0^2 X_0$.

★☆☆ Exercice 2 – Oscillations et facteur de qualité

On considère un circuit RLC série peu amorti. L'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est de la forme

$$u_C(t) = U_m e^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \varphi).$$

1. Rappeler les dimensions de τ et Ω et leurs expressions en fonction de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q, puis en fonction de R, L et C.

2. Que peut-on dire de la pseudo-période des oscillations dans le cas où $Q \gg 1$?

3. On suppose que les oscillations restent visibles tant que leur amplitude reste supérieure à $5\,\%$ de l'amplitude initiale. Exprimer la durée $T_{5\,\%}$ pendant laquelle les oscillations sont visibles, en fonction de ω_0 et Q.

4. En déduire l'expression du nombre N d'oscillations observées en fonction du facteur de qualité.

★☆☆ Exercice 3 – Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

Un signal sinusoïdal peut s'écrire sous la forme $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. On appelle alors A l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ sa phase. Plus précisément φ désigne la phase initiale, ou phase à l'origine, quand le signal est écrit sous cette forme avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants. Le temps est exprimé en secondes.

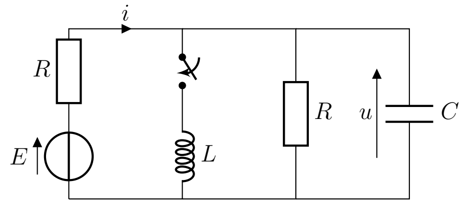
- $s_1(t) = 15\cos(100\pi t + 0{,}5)$;
- $s_2(t) = 5\sin(7{,}854 \times 10^6 t)$;
- $s_3(t) = 2\sin(120\pi t - \frac{\pi}{4})$;
- $s_4(t) = 15\cos(200\pi t) - 5\sin(200\pi t)$.

Aide : pour $s_4(t)$, on pourra mettre $\sqrt{15^2 + 5^2}$ en facteur.

2. Donner la phase initiale d'un signal sinusoïdal de période T qui, à l'instant $t = \frac{T}{4}$, vaut la moitié de sa valeur maximale et est croissant.

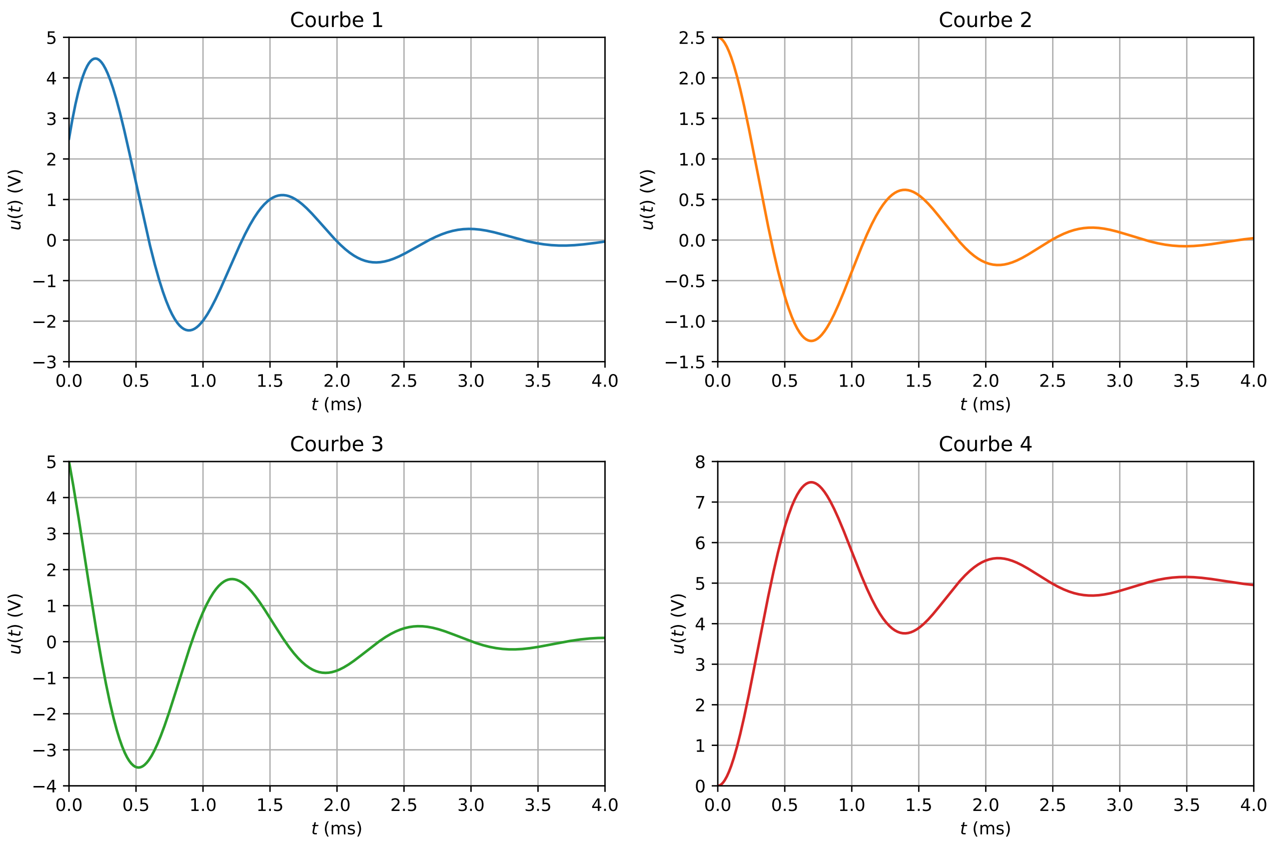
★★☆ Exercice 4 – Connexion d'une bobine à un circuit RC parallèle

Le circuit représenté ci-contre est alimenté depuis très longtemps par un générateur de tension continu de f.é.m. E et de résistance interne R. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on suit à l'oscilloscope l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit RLC parallèle ainsi obtenu.



On donne quelques valeurs : $E = 5\,\text{V}$, $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 100\,\text{nF}$.

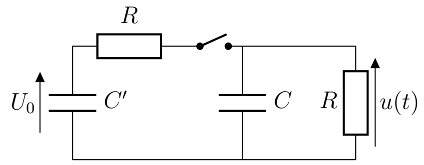
1. Donner la valeur de $u(t = 0^+)$. Justifier.
2. Donner la valeur vers laquelle doit tendre $u(t)$ en régime permanent. Justifier.
3. Montrer que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.
4. Établir, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après la fermeture de l'interrupteur. L'écrire sous sa forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
5. Établir une inégalité vérifiée par R, L et C pour que l'on observe un régime pseudo-périodique. On suppose cette inégalité vérifiée pour la suite.
6. Parmi les courbes représentées ci-dessous, identifier celle qui convient. Justifier.



7. Représenter l'allure de $i(t)$, sans établir ni résoudre d'équation différentielle.
8. Proposer une estimation de la valeur de l'inductance L.
9. Résoudre l'équation différentielle pour donner l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

★★☆ Exercice 5 – Pont de Wien en régime transitoire

On considère le circuit représenté ci-contre en $t = 0^-$. L'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur C' est chargé sous une tension $U_0 = 3\,\mathrm{V}$ tandis que le condensateur C est déchargé.



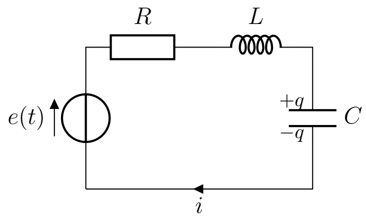
La capacité des deux condensateurs est la même $C = C' = 100\,\mathrm{nF}$. On prend $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et on pose $\tau = RC$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer sans calcul les valeurs de la tension $u(t)$ pour $t = 0^+$ et lorsque le régime permanent est atteint, c'est-à-dire quand $t \to \infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geqslant 0$ est :
$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$
Préciser la valeur du facteur de qualité Q.
3. La résoudre pour exprimer $u(t)$ pour $t \geqslant 0$ et représenter graphiquement $u(t)$.
4. Déterminer l'instant t_m pour lequel $u(t)$ passe par un maximum.

★★☆ Exercice 6 – Régime pseudo-périodique

On considère un circuit composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. On soumet le circuit à un échelon de tension tel que :

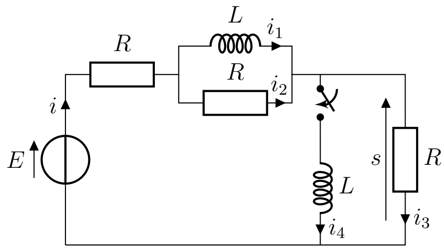
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ E & \text{si } t > 0. \end{cases}$$



1. Justifier qu'à $t = 0^-$, la charge q et l'intensité i sont nulles.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pour $t > 0$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\gamma = \frac{R}{2L}$.
3. Donner les valeurs de q et de sa dérivée première en $t = 0^+$. Justifier.
4. Donner la condition portant sur ω_0 et γ pour laquelle on observe un régime transitoire pseudo-périodique. On supposera cette condition vérifiée pour la suite.
5. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme
$$q(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\gamma t} + D,$$
où on exprimera ω, A, B et D en fonction de C, E, ω_0 et γ.
6. Exprimer l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.
7. Représenter graphiquement $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont les valeurs atteintes après le régime transitoire ? Justifier par des considérations simples.
8. Déterminer l'énergie totale W fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur après le régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat qui apparait quand $R \to 0$.

★★★ Exercice 7 – Circuit à deux bobines

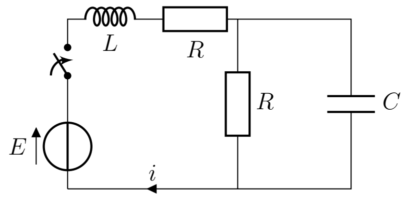
L'interrupteur est ouvert depuis un temps très long. On le ferme à l'instant $t = 0$.



1. Déterminer les intensités avant et après fermeture de l'interrupteur.
2. Déterminer les intensités en régime permanent, c'est-à-dire quand $t \to \infty$.
3. Relier $s(t)$ à $i_3(t)$, puis à $i_4(t)$. En déduire $i_3(t)$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en fonction de R ,L, $s(t)$,$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
4. Relier $i_1(t)$ et $i_2(t)$. En déduire $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en fonction de R, L, i_2 et $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$.
5. Montrer que $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = 0$ (on pourra s'aider d'une loi des mailles). En déduire que $i_2 = \frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{2s}{R}$.
6. Trouver une EDL vérifiée par $s(t)$ et la résoudre.

★★★ Exercice 8 – Réponse d'un circuit RLC

Le circuit représenté ci-contre est alimenté par un générateur de tension continu de f.é.m. E. On suppose que l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



On suppose que $RC = L/R = \tau$. Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant pour $t > 0$.

✓ Éléments de correction

Ex. 1 1. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$; 2.a. $x(t) = x_0\cos\omega_0 t$; 2.b. $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$; 2.c. $x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$; 3.a. $x(t) = (x_0 - X_0)\cos\omega_0 t + X_0$; 3.b. $x(t) = -X_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + X_0$; 3.c. $x(t) = (x_0 - X_0)\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + X_0$.

Ex. 2 1. $[\tau] = \mathrm{T}$, $[\Omega] = \mathrm{T}^{-1}$, $\tau = 2Q/\omega_0$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$; 2. $T \approx T_0$; 3. $T_{5\,\%} = \frac{2Q}{\omega_0}\ln 20$; 4. $N \approx Q$.

Ex. 3 1. $A_1 = 15$, $T_1 = 0{,}02\,\mathrm{s}$, $f_1 = 50\,\mathrm{Hz}$, $\varphi_1 = 0{,}5\,\mathrm{rad}$; $A_2 = 5$, $T_2 = 0{,}8\,\mathrm{\mu s}$, $f_2 = 1{,}25\,\mathrm{MHz}$, $\varphi_2 = -\pi/2$; $A_3 = 2$, $T_3 = 16{,}7\,\mathrm{ms}$, $f_3 = 60\,\mathrm{Hz}$, $\varphi_3 = -3\pi/4$; $A_4 = \sqrt{15^2 + 5^2}$, $T_4 = 1\,\mathrm{ms}$, $f_4 = 1\,\mathrm{kHz}$, $\tan\varphi_4 = 1/3$; 2. $\varphi = -5\pi/6$.

Ex. 4 1. $u(t = 0^+) = \frac{E}{2}$; 2. $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$; 3. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$; 4. $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$; 5. $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$; 6. courbe 2 ; 8. $L \approx 0{,}47\,\mathrm{H}$; 9. $u(t) = \frac{E}{2}e^{-\mu t}(\cos\Omega t + \frac{\mu}{\Omega}\sin\Omega t)$, $\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Ex. 5 1. $u(t = 0^+) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$; 2. $Q = 1/3$; 3. $u(t) = \frac{U_0}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t} - e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t}\right)$; 4. $t_m = \frac{\tau}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}86\,\mathrm{ms}$.

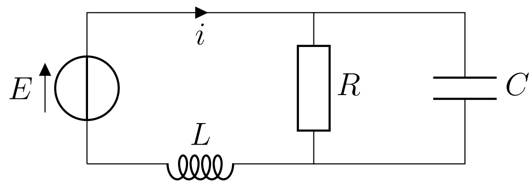
Ex. 6 2. $\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = CE$; 3. $q(t = 0^+) = 0$, $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$; 4. $\omega > \gamma$; 5. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $A = -CE$, $B = -\gamma CE/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $D = CE$; 6. $i(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega}CEe^{-\gamma t}\sin(\omega t)$; 7. $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = CE$, $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = 0$; 8. $W = CE^2$, $\mathcal{E}_{LC} = CE^2/2 = \mathcal{E}_{\mathrm{J}}$.

Ex. 7 1. $i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}$, $i_2(0^-) = i_4(0^-) = 0$; $i(0^+) = i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{E}{2R}$, $i_2(0^+) = i_4(0^+) = 0$; 2. $i(\infty) = i_1(\infty) = i_4(\infty) = E/R$, $i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$; 3. $s = Ri_3 = L\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t}$, $i_3 = s/R$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$; 4. $L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = Ri_2$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{L}i_2 + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$; 6. $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$, $\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{3}L}$, $Q = \sqrt{3}/4$, $s(t) = \frac{E}{4}\left(e^{-\frac{R}{3L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Ex. 8 $\tau^2\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + 2\tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2i = \frac{E}{R}$, $i(0^+) = 0$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = E/L$, $i(t) = \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}\left(-\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{2R}$.

Exercice 9 – Encore un RLC – Oral CCP

On considère le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i.
2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
3. Justifier qualitativement l'expression du facteur de qualité.
4. Donner la valeur de l'intensité i et de sa dérivée à l'instant initial. Justifier.
5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Exercice 10 – Résolution numérique d'une équation du deuxième ordre

Pour résoudre numériquement une équation d'ordre n, l'idée est de se ramener à un système de n équations différentielles du premier ordre, portant sur la grandeur à calculer et ses dérivées successives. Par exemple, l'équation vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur d'un circuit LC sans source s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0.$$

En posant $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$, cette équation peut s'écrire sous la forme d'un système de deux équations couplées du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = y(t); \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = -\omega_0^2 x(t), \end{cases}$$

ou, sous forme vectorielle avec $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \\ -\omega_0^2 x(t) \end{pmatrix} = F(V, t).$$

La résolution numérique passe par une discrétisation du temps : l'instant t devient l'instant $t_k = k\delta t$, où δt est le pas de temps utilisé, et on note $x_k = x(t_k)$ et $y_k = y(t_k)$. On peut alors calculer numériquement les valeurs de x_k et y_k en procédant par itération avec la méthode d'Euler explicite par exemple. On peut aussi utiliser la fonction `odeint`[1] de la bibliothèque `scipy.integrate`, dédiée à la résolution d'équations différentielles.

Le programme `tdE3_mwe_odeint.py` donne un exemple de résolution du système précédent.

1. La fonction `odeint` a vocation à être remplacée par la fonction `solve_ivp`, plus flexible, mais aussi plus lourde a implémenter. Par ailleurs seule la fonction `odeint` est au programme.

On s'intéresse à un circuit RLC série sans source, caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.

2. Réécrire cette équation sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées portant sur $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$.

3. Écrire la fonction `oa_sans_source(V,t)` associée à ce système, où V est le vecteur défini précédemment.

4. Résoudre numériquement ce système afin d'obtenir l'évolution temporelle de $u(t)$ pour $\omega_0 = 2\pi \times 10\,\mathrm{Hz}$ et $Q = 30$. On prendra $u(0) = 1\,\mathrm{V}$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

5. Représenter graphiquement l'évolution de $u(t)$.

Le circuit est maintenant alimenté par une source idéale de tension de f.é.m. $e(t)$.

6. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $e(t) = E\sin(\omega t)$, avec $E = 0{,}5\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1{,}25\omega_0$. Commenter l'allure de $u(t)$.

7. Mesurer la fréquence du signal en régime permanent. Commenter.

8. Les conditions initiales ont-elles un effet sur l'amplitude du signal en régime permanent ?

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t)` : intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F(V,t), \quad \text{où} \quad V = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Paramètres :

`F` : fonction qui donne la dérivée de V en t ;

`V0` : conditions initiales sur V ;

`t` : liste des instants auxquels calculer V.

Renvoie :

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs V, calculés aux instants de `t`.