TD E1 – Circuits électriques
Correction

Exercice 1 – Conventions

1. Convention récepteur :

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.}$$

2. Convention générateur :

$$\boxed{u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

3. Convention récepteur :

$$\boxed{u = Ri - e.}$$

4. Convention générateur :

$$\boxed{u = -Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

Exercice 2 – Lois de Kirchhoff

Avec la loi des mailles, appliquée dans les différentes mailles du réseau, on obtient :

$$U_1 = -5\,\mathrm{V}, \quad U_2 = 0\,\mathrm{V}, \quad U_3 = 15\,\mathrm{V}, \quad U_4 = -15\,\mathrm{V} \quad \text{et} \quad U_5 = -15\,\mathrm{V}.$$

En appliquant la loi des nœuds au différents nœuds du réseau, on trouve :

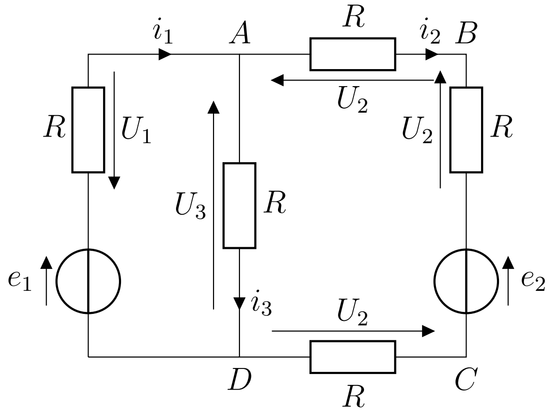
$$I_1 = 10\,\mathrm{mA}, \quad I_2 = -10\,\mathrm{mA}, \quad I_3 = 0\,\mathrm{mA}, \quad I_4 = -5\,\mathrm{mA}, \quad I_5 = 15\,\mathrm{mA} \quad \text{et} \quad I_6 = 20\,\mathrm{mA}.$$

Exercice 3 – Circuit à deux mailles

1. La loi des nœuds appliquée en A ou D permet d'exprimer l'intensité i_3 du courant dans la branche AD du réseau en fonction de i_1 et i_2 :

$$i_3 = i_1 - i_2.$$

La loi d'Ohm permet d'exprimer la tension aux bornes de chaque résistance du circuit. Finalement, les valeurs de e_1 et e_2 sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans chaque maille du circuit.



2. La loi des mailles dans la maille de gauche s'écrit

$$e_1 = Ri_1 + Ri_3 = 2Ri_1 - Ri_2,$$

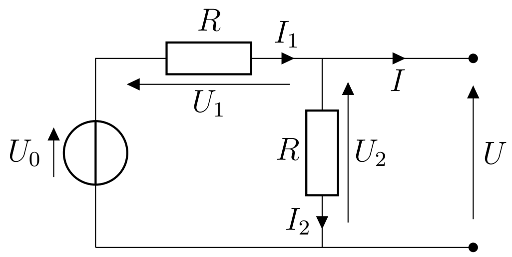
et dans la maille de droite

$$e_2 = -3Ri_2 + Ri_3 = Ri_1 - 4Ri_2.$$

La résolution du système donne

$$\boxed{i_1 = \frac{4e_1 - e_2}{7R}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{e_1 - 2e_2}{7R}.}$$

Exercice 4 – Générateur équivalent



1. On a immédiatement $U = U_2$ et la loi des mailles donne $U_0 = U_1 + U_2 = U_1 + U$. Avec la loi d'Ohm, on a

$$U_0 = RI_1 + U$$

D'autre part, la loi des nœuds donne $I + I_2 = I_1$, d'où, en utilisant la loi d'Ohm

$$I_1 = I + \frac{U_2}{R} = I + \frac{U}{R}.$$

En injectant dans l'équation précédente, on obtient finalement après calcul

$$\boxed{U = \frac{U_0}{2} - \frac{R}{2}I.}$$

2. On reconnait la loi de comportement d'un générateur de Thévenin de **f.é.m.** $E = U_0/2$ et de **résistance interne** $r = R/2$.

Exercice 5 – Interrupteurs

Corrigé en classe.

Exercice 6 – Résistance équivalente

1.

$$R_{\text{éq}} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R+R}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_{\text{éq}} = 3R.}$$

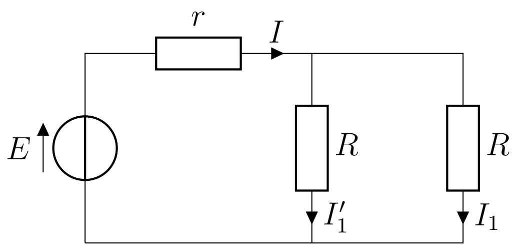
2.

$$R_{\text{éq}} = \frac{1}{\frac{1}{6R} + \frac{1}{3R}} + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_{\text{éq}} = 3R.}$$

Exercice 7 – Ampoule grillée

Soient E la f.é.m. du générateur, r sa résistance interne et R la résistance d'une ampoule.

Dans le cas où les deux ampoules fonctionnent, le schéma électrique équivalent au montage est celui représenté ci-dessous.

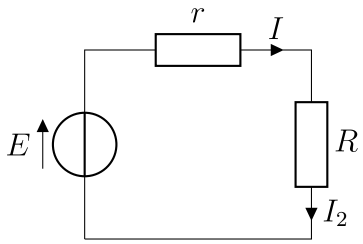


La résistance équivalente du circuit est $r + R/2$, d'où $I = 2E/(2r + R)$ et on reconnait un pont diviseur de courant, d'où immédiatement $I_1 = I_1' = I/2$. Si les deux ampoules sont allumées, le courant I_1 traversant une ampoule est donc

$$\boxed{I_1 = \frac{E}{R + 2r}.}$$

.

Dans le cas où seule l'une des ampoules fonctionne, le schéma électrique équivalent au montage devient :



La résistance équivalente du circuit est cette fois $r + R$, d'où $I = I_2 = E/(r + R)$. Si une ampoule est grillée, le courant I_2 traversant l'autre ampoule est

$$\boxed{I_2 = \frac{E}{R + r}.}$$

On remarque $I_2 > I_1$: **l'ampoule restante brille plus fort** que lorsque les deux fonctionnent.

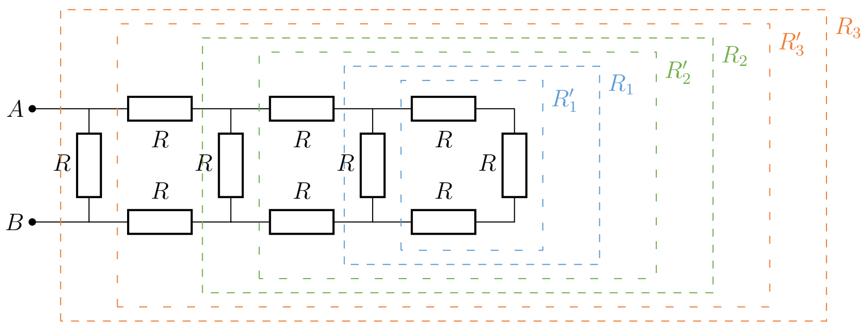
Pour un générateur idéal, $r = 0$, d'où $I_1 = I_2$. Si l'une des ampoule grille, l'autre n'est pas affectée.

Exercice 8 – Association infinie

1. Pour un module,

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_1 = \frac{3R}{4}.}$$

Pour trois modules, on calcule successivement les résistances équivalentes, de la droite vers la gauche :



On a

$$R_2' = 2R + R_1, \quad R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2'}}, \quad R_3' = 2R + R_2 \quad \text{et} \quad R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3'}},$$

d'où, après calcul

$$\boxed{R_3 = \frac{41}{56}R.}$$

2. En poursuivant le raisonnement précédent, on trouve

$$R_n = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_{n-1}}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_n = \frac{R(2R + R_{n-1})}{3R + R_{n-1}}.}$$

Pour $n \to \infty$, on a

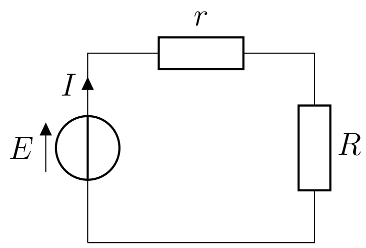
$$R_\infty = \frac{R(2R + R_\infty)}{3R + R_\infty} \quad \text{soit} \quad R_\infty^2 + 2RR_\infty - 2R^2 = 0$$

La résolution donne deux racines, dont une seulement est positive. Finalement, on obtient

$$\boxed{R_\infty = (\sqrt{3} - 1)R.}$$

Exercice 9 – Adaptation d'impédance

1. Le schéma électrique associé au montage étudié est représenté ci-dessous.



La résistance équivalente vaut $R + r$, donc l'intensité I du courant dans le circuit vaut $E/(R+r)$. La puissance reçue par la résistance R s'écrit donc

$$\boxed{\mathcal{P}_R = RI^2 = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2.}$$

2. Par définition, la puissance fournie par le générateur vaut

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{tot}} = EI = \frac{E^2}{R+r}.}$$

3. On a

$$\lim_{R\to 0}\mathcal{P}_R = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty}\mathcal{P}_R = 0,$$

avec $\mathcal{P}_R > 0$. La puissance reçue par la résistance passe donc nécessairement par un maximum entre 0 et ∞.

4. On étudie la fonction $\mathcal{P}_R(R)$. La dérivée première donne

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_R}{\mathrm{d}R} = \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2.$$

Cette dérivée s'annule en $R = r$. On confirme qu'il s'agit bien d'un maximum en étudiant les variations de $\mathcal{P}_R(R)$, croissante si $R < r$ et décroissante sinon. [1]
On a donc

$$\boxed{R_0 = r.}$$

5. Pour $R = r$, on obtient $\eta = 0{,}5$. Lorsque le transfert d'énergie entre le générateur et la résistance R est maximal, la moitié de l'énergie est perdue par effet Joule dans la résistance interne du générateur.

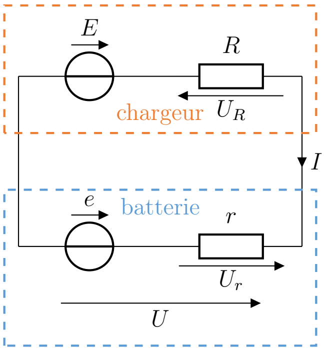
1. On peut aussi vérifier que la dérivée seconde est négative en $R = r$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{P}_R}{\mathrm{d}R^2}\right|_{R=r} = -\frac{E^2}{8R^3}.$$

Exercice 10 – Montages courte et longue dérivation

Corrigé en classe

Exercice 11 – Charge d'une batterie



1. On applique la loi des mailles et la loi d'Ohm pour chaque résistance, d'où $E - e = (R + r)I$, soit

$$\boxed{I = \frac{E-e}{R+r}.}$$

A.N. : $I = 2\,\mathrm{A}$.
U et I sont de sens opposés, la batterie est en convention récepteur.

2. Par définition on a

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{g} = EI,} \quad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{J} = (R+r)I^2 = \frac{(E-e)^2}{R+r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{b} = eI = \mathcal{P}_\mathrm{g} - \mathcal{P}_\mathrm{J}.}$$

A.N. : $\mathcal{P}_\mathrm{g} = 26\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_\mathrm{J} = 2\,\mathrm{W}$ et $\mathcal{P}_\mathrm{b} = 24\,\mathrm{W}$.
La dernière égalité traduit la conservation de l'énergie : la puissance reçue par la batterie correspond à la fraction de la puissance fournie par le générateur qui n'est pas dissipée par effet Joule.
Par définition, le rendement η correspond au rapport entre l'énergie utile (ou la puissance utile, ici $\mathcal{P}_\mathrm{b}$) et l'énergie coûteuse (ou la puissance coûteuse, ici $\mathcal{P}_\mathrm{g}$), d'où

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{b}}{\mathcal{P}_\mathrm{g}} = \frac{e}{E}.}$$

A.N. : $\eta \approx 0{,}92$.
On remarque que le rendement est maximal si $E = e$: il n'y a pas de courant dans le circuit, donc pas de pertes par effet Joule, mais il n'y a pas non plus de transfert d'énergie entre le générateur et la batterie...

3. La quantité $70\,\mathrm{A\cdot h}$ est homogène à un courant multiplié par un temps, soit à une **charge électrique** Q exprimée en coulombs (C). La capacité électrique (d'un condensateur par exemple) est une autre grandeur physique, il s'agit ici d'un abus de langage. On a ici

$$Q_\mathrm{tot} = 70\,\mathrm{A\cdot h} \times 3600\,\mathrm{s\cdot h^{-1}} = 2{,}52 \times 10^5\,\mathrm{C}.$$

Cette grandeur indique que la batterie est capable de débiter 70 A pendant 1 h sous une tension de 12 V, ou de manière équivalente mais plus raisonnable 1 A pendant 70 h sous une tension de 12 V. L'énergie fournie par la batterie pendant une durée τ est, si la puissance fournie reste constante $\mathcal{E} = \mathcal{P}_\mathrm{b}\tau = eI\tau = eQ$ car si $I = \mathrm{cste}$, on a par définition $I = Q/\tau$. On a donc ici

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{tot} = eQ_\mathrm{tot}.}$$

A.N. : $\mathcal{E}_\mathrm{tot} \approx 3{,}0\,\mathrm{MJ}$.

4. Par définition, on a

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

et on a montré

$$I = \frac{E-e}{R+r} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

L'intensité du courant est constante, d'où en intégrant

$$q(t) = q_0 + \frac{E-e}{R+r}t,$$

avec $q_0 = 0{,}1Q_\mathrm{tot}$ la charge initiale de la batterie.
Au bout d'un temps Δt, la batterie est complètement chargée, d'où

$$Q_\mathrm{tot} = 0{,}1Q_\mathrm{tot} + \frac{E-e}{R+r}\Delta t,$$

soit

$$\boxed{\Delta t = 0{,}9Q_\mathrm{tot}\frac{R+r}{E-e} = 0{,}9\frac{\mathcal{E}_\mathrm{tot}}{\mathcal{P}_\mathrm{tot}}.}$$

A.N. : $\Delta t = 31{,}5\,\mathrm{h}$.

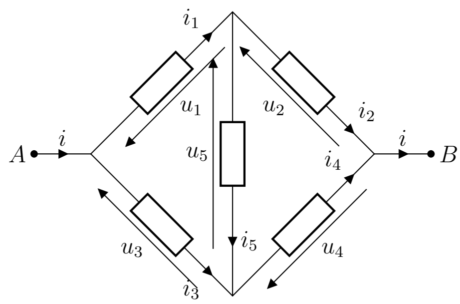
5. On a directement, puisque la puissance dissipée par effet Joule est constante

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{J} = \mathcal{P}_\mathrm{J}\Delta t.}$$

A.N. : $\mathcal{E}_\mathrm{J} = 0{,}23\,\mathrm{MJ}$. Cette valeur correspond bien à 8 % de la puissance fournie par le générateur lors de la charge.

Exercice 12 – Résistance équivalente (bis)

1. On définit les intensités i, i_1, i_2 i_3, i_4 et i_5, ainsi que les tensions u, u_1, u_2 u_3, u_4 et u_5 comme ci-dessous



et on cherche l'expression de $R_{\text{éq}}$ telle que $u_{AB} = R_{\text{éq}} i$.
La loi des nœuds donne pour les nœuds de gauche et droite

$$i = i_1 + i_3 = i_2 + i_4, \quad \text{soit} \quad 2i = i_1 + i_3 + i_2 + i_4.$$

De plus, par additivité des tensions, on a

$$u_{AB} = u_1 + u_2 = u_3 + u_4, \quad \text{soit} \quad 2u_{AB} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4.$$

En appliquant la loi d'Ohm, cette relation devient

$$2R_{\text{éq}} i = R(i_1 + i_2 + i_3 + i_4) = R \times 2i.$$

Par identification, on obtient simplement

$$\boxed{R_{\text{éq}} = R.}$$

Par ailleurs, en appliquant la loi des nœuds aux nœuds du haut et du bas, on obtient

$$i_5 = i_1 - i_2 = i_4 - i_3 \quad \text{soit encore} \quad 2i_5 = i_1 - i_2 + i_4 - i_3.$$

La loi des mailles donne dans les mailles de gauche et droite

$$u_5 = u_3 - u_1 = u_2 - u_4, \quad \text{soit encore} \quad 2u_5 = u_3 - u_1 + u_2 - u_4.$$

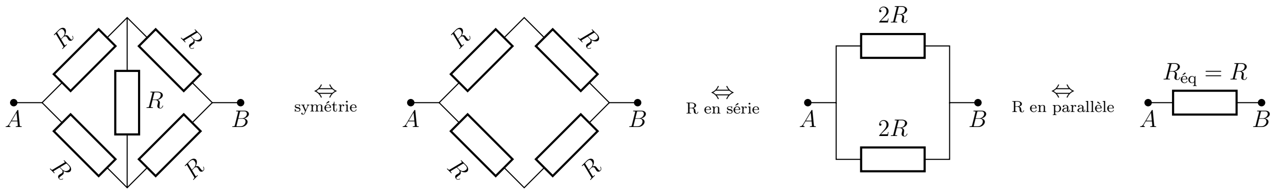
Avec la loi d'Ohm et en simplifiant par R :

$$2i_5 = i_3 - i_1 + i_2 - i_4.$$

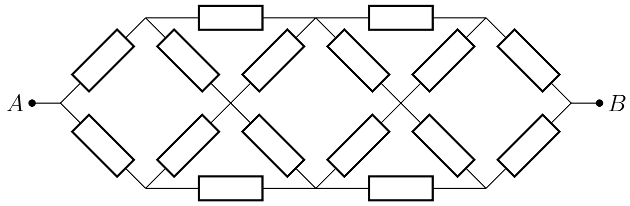
On obtient donc deux relations qui mènent à $2i_5 = -2i_5$, ce qui donne finalement

$$\boxed{i_5 = 0.}$$

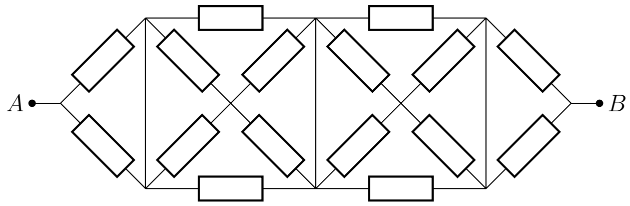
L'intensité du courant dans la branche centrale est nulle.
Ce résultat était prévisible en remarquant la symétrie du circuit : le potentiel électrique au nœud en haut est nécessairement le même que celui du nœud en bas du montage. On arrive directement à $u_5 = 0$ et $i_5 = 0$. Retirer cette branche du circuit ne change pas le montage, mais rend son étude bien plus simple, puisque on a alors deux branches en parallèle, chacune de résistance $2R$. On retrouve finalement $R_{\text{éq}} = R$.



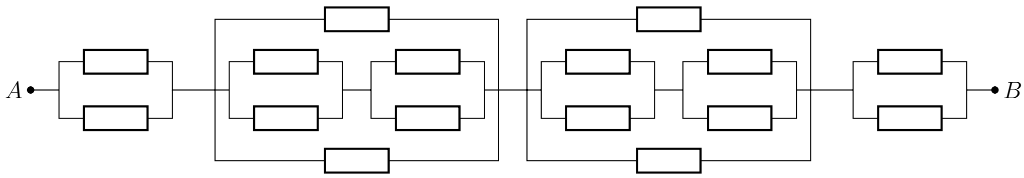
2. On étudie ce circuit en prenant en compte ses symétries. Les nœuds symétriques par rapport à la droite (AB) ont des potentiels électriques égaux : il est possible de les relier par des fils sans rien changer au fonctionnement du montage.



$\Leftrightarrow$
symétrie



Le réseau peut alors se schématiser de manière à mettre clairement en évidence les associations de résistances.



On obtient alors :

$$R_{\text{éq}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_{\text{éq}} = \frac{5R}{3}.}$$