TD E2 – Circuits du premier ordre
Correction

Exercice 1 – Temps caractéristiques

1. La dimension d'une tension se retrouve avec l'expression de la puissance reçue par un dipôle, celles de R, C et L se retrouvent en passant par les expressions de la puissance dissipée par effet Joule et des énergies stockées par le condensateur et la bobine. On en déduit

$$\boxed{[RC] = \left[\frac{L}{R}\right] = \mathrm{T}.}$$

2. On montre que $\boxed{\left[\sqrt{LC}\right] = \mathrm{T}}$ (cf. Chap. E3).

Exercice 2 – Associations de dipôles

1. **Cas de deux condensateurs en dérivation**
La loi des mailles dans la maille de gauche donne $E = Ri + u$. D'autre part la loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. Avec les lois de comportement des condensateurs, on obtient

$$E = R\left(C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) + u, \quad \text{soit} \quad E = R(C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u.$$

On reconnait l'équation différentielle associée à un circuit RC série, avec un unique condensateur de capacité équivalente

$$\boxed{C_{\text{éq}} = C_1 + C_2.}$$

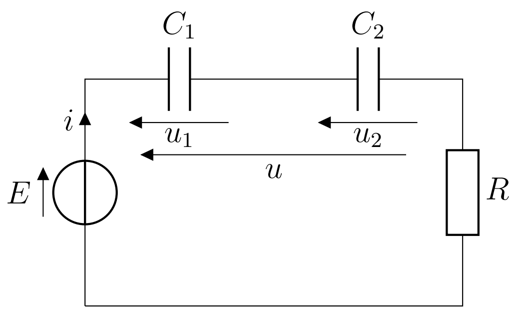
Cas de deux bobines en série
La loi des mailles donne $E = Ri + u$. Par additivité des tensions, on a $u = u_1 + u_2$. Avec les lois de comportement des bobines, on obtient

$$E = Ri + \left(L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right), \quad \text{soit} \quad E = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri.$$

On reconnait l'équation différentielle associée à un circuit RL série, avec une unique bobine d'inductance équivalente

$$\boxed{L_{\text{éq}} = L_1 + L_2.}$$

2. **Cas de deux condensateurs en série**



La loi des mailles s'écrit $E = Ri + u$. On peut exprimer i en fonction de u_1 ou u_2 en utilisant l'une ou l'autre la loi de comportement de l'un l'autre des condensateurs :

$$E = RC_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u \quad \text{et} \quad E = RC_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u.$$

On multiplie la première par C_2 et la deuxième par C_1 et on les ajoute pour obtenir

$$(C_1 + C_2)E = RC_1C_2 \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \right) + (C_1 + C_2)u,$$

soit

$$(C_1 + C_2)E = RC_1C_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1 + u_2) + (C_1 + C_2)u.$$

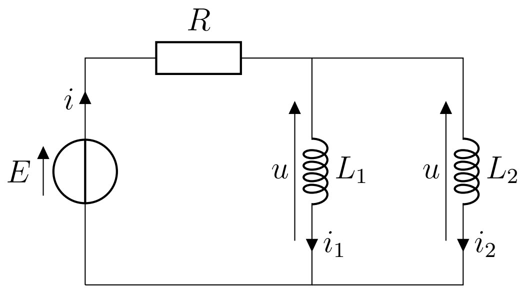
Avec la loi d'additivité des tensions et en divisant par $(C_1 + C_2)$, on trouve

$$E = R\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u.$$

On reconnait l'équation différentielle associée à un circuit RC série, avec un unique condensateur de capacité équivalente

$$C_{\text{éq}} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.}$$

Cas de deux bobines en parallèle



Le raisonnement est similaire, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.}$$

3. En exploitant les lois d'associations de dipôles, on peut ramener le circuit à un simple circuit RL série, avec une résistance équivalente $R_{\text{éq}} = R/3$ et une inductance équivalente $3L/2$. L'étude est ensuite identique à ce qui a été fait en cours, si bien que l'on obtient

$$\boxed{i(t) = \frac{3E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{9L}{2R}.}$$

A.N. : $\tau \approx 23\,\mu\text{s}$.

Exercice 3 – Comportement aux limites

Corrigé en classe.

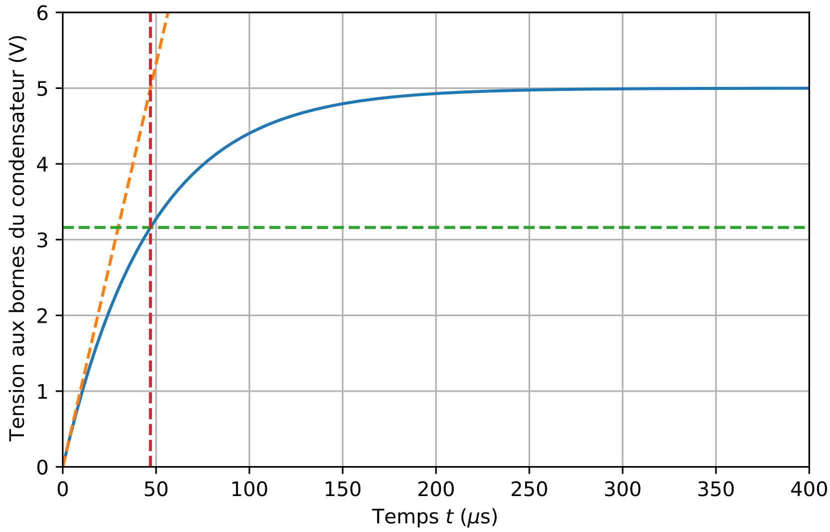
Exercice 4 – Étude d'un circuit RC

1. Pour un circuit RC série, on a

$$\boxed{\tau_{\text{théo}} = RC.}$$

A.N. : $\tau_{\text{théo}} = 23{,}5\,\mu\text{s}$.

2. Graphiquement, avec la méthode de la **tangente à l'origine**, ou avec la **méthode des 63 %** on obtient $\boxed{\tau_{\text{exp}} \approx 47\,\mu\text{s}}$.



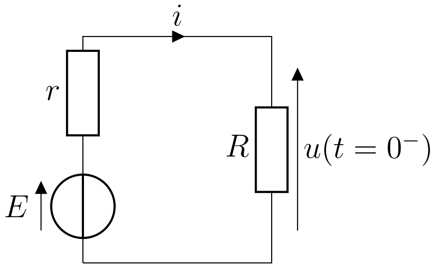
3. On a oublié la résistance interne R_{GBF} du GBF, de l'ordre de $50\,\Omega$: elle ne peut être négligée compte tenu de la valeur de la résistance R utilisée dans le montage. Le temps caractéristique du circuit s'exprime en réalité

$$\tau_{\text{exp}} = (R + R_{\text{GBF}})C, \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_{\text{GBF}} = \frac{\tau_{\text{exp}}}{C} - R.}$$

A.N. : $R_{\text{GBF}} = 50\,\Omega$. On retrouve bien la valeur attendue pour la résistance interne du GBF.

Exercice 5 – Décharge d'un condensateur

En $t = 0^-$, l'interrupteur est fermé depuis longtemps, le régime permanent est établi : le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.

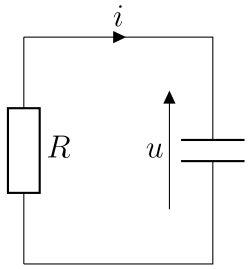


La tension $u(t=0^-)$ aux bornes du condensateur est alors égale à la tension aux bornes de la résistance R. On reconnait un pont diviseur de tension, d'où

$$u(t=0^-) = \frac{RE}{R+r}.$$

La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc $u(t=0^+) = u(t=0^-)$.

Pour $t > 0$, l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant qui traverse le générateur et la résistance r est nulle : le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



La loi des mailles et la loi de comportement du condensateur permettent d'obtenir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. On obtient

$$0 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre, dont la solution générale est de la forme $u(t) = Ae^{-t/\tau}$, où A est une constante qui dépend des conditions initiales.

On a

$$u(t=0) \underset{\text{sol}^\circ}{=} A \underset{\text{C.I.}}{=} \frac{RE}{R+r},$$

d'où finalement

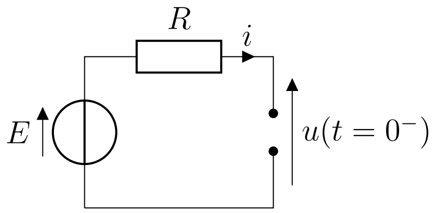
$$\boxed{u(t) = \frac{RE}{R+r}e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.}$$

L'intensité $i(t)$ du courant s'obtient immédiatement avec la loi de comportement du condensateur :

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R+r}e^{-t/\tau}.}$$

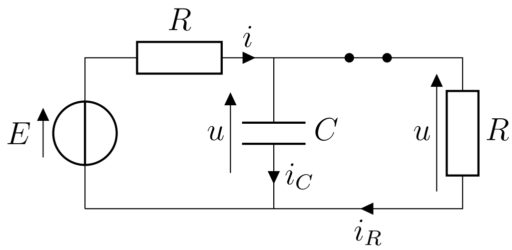
Exercice 6 – Circuit RC à deux mailles

En $t = 0^-$, l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant qui traverse la résistance de droite est nulle et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



L'intensité qui traverse le circuit est nulle, donc $u(t = 0^-) = E$. La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où $u(t = 0^+) = u(t = 0^-)$.

Pour $t > 0$, le circuit est celui représenté ci-dessous.



La loi des nœuds et la loi des mailles dans la maille de gauche donnent

$$i = i_C + i_R \quad \text{et} \quad E = Ri + u.$$

Les lois de comportement de la résistance et du condensateur s'écrivent

$$i_R = \frac{u}{R} \quad \text{et} \quad i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

En combinant ces relations, on obtient l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

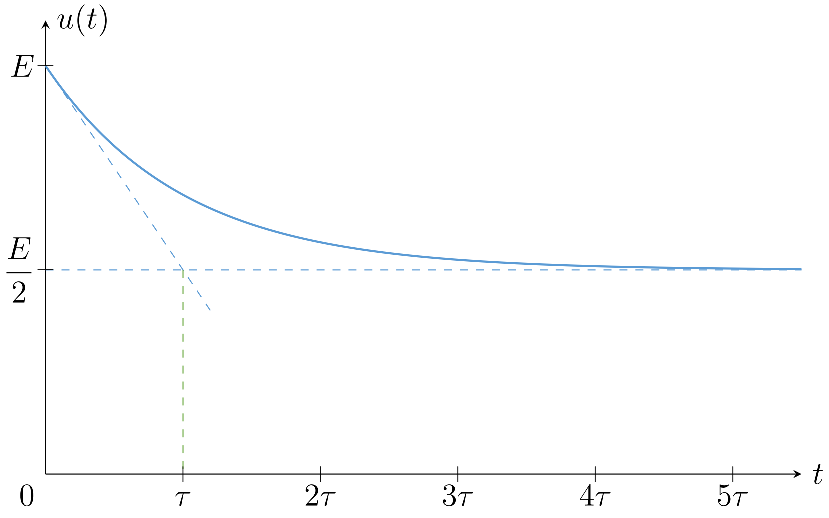
$$\frac{E}{2\tau} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{2}.$$

La solution de l'équation homogène est de la forme $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$, où A dépend des conditions initiales. La solution particulière est $u_p(t) = E/2$. La solution générale est de la forme $u(t) = Ae^{-t/\tau} + E/2$. On a

$$u(t=0) \underset{\text{sol°}}{=} A + \frac{E}{2} \underset{\text{C.I.}}{=} E, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{E}{2}.$$

Finalement, la solution est

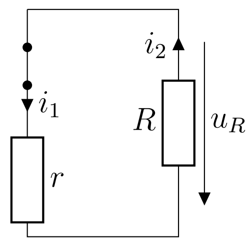
$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(e^{-t/\tau} + 1\right).}$$



Exercice 7 – Clôture électrique

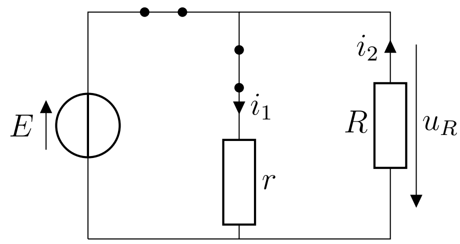
Corrigé en classe.

1. En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil. Dans le cas où
   - l'interrupteur est ouvert, le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



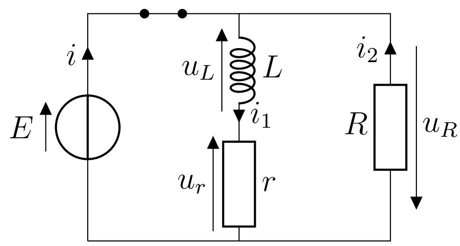
On a alors immédiatement $\boxed{i_1 = i_2 = 0}$ et $\boxed{u_R = 0}$.

   - l'interrupteur est fermé, le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



On obtient alors avec la loi des mailles et la loi d'Ohm, $\boxed{u_R = -E}$, $\boxed{i_1 = E/r}$ et $\boxed{i_2 = -E/R}$.

2. Pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[$, l'interrupteur est fermé, le circuit est donc équivalent à celui représenté ci-dessous.



On applique la loi des mailles dans la maille de gauche et la loi de comportement de la bobine pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par i_1 :

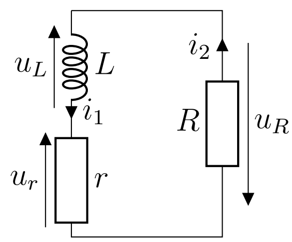
$$\boxed{\frac{1}{\tau}\frac{E}{r} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{r}.}$$

Initialement, la bobine n'a pas stocké d'énergie, d'où $i_1(t = 0^-) = 0 = i_1(t = 0^+)$, car l'intensité du courant qui traverse une bobine est continue. La résolution de l'équation différentielle donne

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{r}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{où} \quad \tau = \frac{L}{r}.}$$

Cette solution est compatible avec le comportement asymptotique du circuit.
De plus avec $\tau = 0{,}1\,\mathrm{s}$, on a $T/2 \sim 5\tau$: en $t = T/2$, le régime permanent est établi.

3. On pose $t' = t - T/2$. Sur l'intervalle $t' \in \left[0, \frac{T}{2}\right[$, l'interrupteur est ouvert et le circuit se ramène à celui représenté ci-dessous.



On a $i_1 = i_2$. L'équation différentielle vérifiée par $i_1(t')$ s'obtient en appliquant la loi des mailles et les lois de comportement :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau'}, \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{L}{R+r}.$$

L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue, d'où $i_1(t = 0^+) = i_1(t = 0^-) = E/r$. La résolution de l'équation différentielle donne finalement

$$i_1(t') = \frac{E}{r}e^{-t'/\tau'}, \quad \text{soit} \quad \boxed{i_1(t) = \frac{E}{r}e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau'} \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{L}{R+r}.}$$

Le comportement asymptotique du circuit est compatible avec cette solution.

4. Pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[$, on a directement

$$\boxed{u_R(t) = -E < E, \quad \text{pour} \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[.}$$

Pour cette application, on souhaite en réalité obtenir une tension plus élevée que E en valeur absolue, ce n'est pas le cas quand l'interrupteur est fermé.
Pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[$, la tension aux bornes de la résistance R s'obtient immédiatement avec la loi d'Ohm :

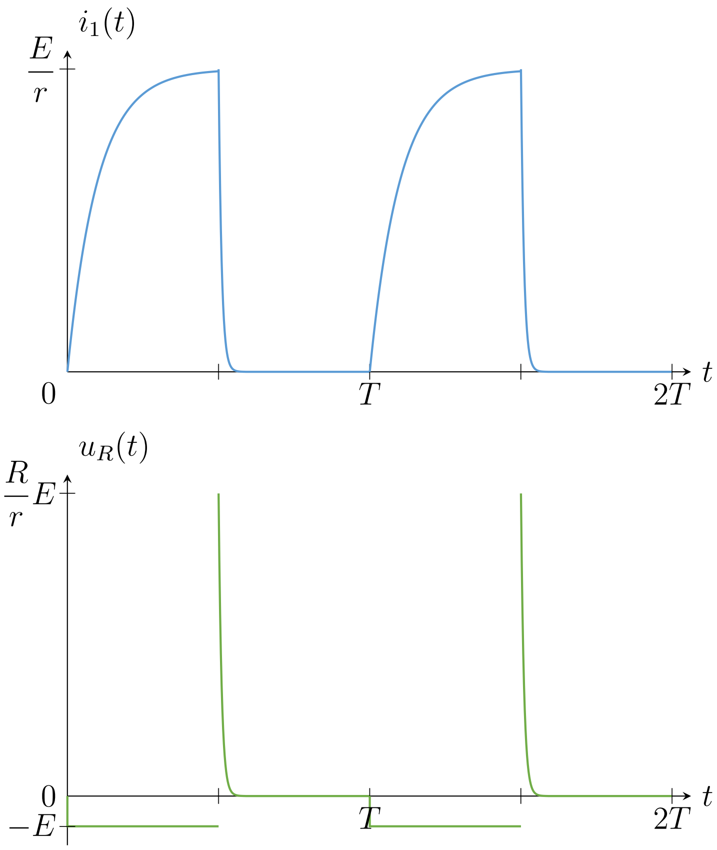
$$\boxed{u_R(t) = \frac{R}{r}Ee^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau'} \quad \text{pour} \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[.}$$

On obtient une surtension aux bornes de la résistance R immédiatement après la fermeture de l'interrupteur : $u_R(t = T/2) = RE/r = 100E \gg E$.
Sur cet intervalle, on cherche la durée Δt telle que $u_R(t = T/2 + \Delta t) = 10E$. On obtient

$$\boxed{\Delta t = \tau' \ln\left(\frac{R}{10r}\right).}$$

A.N. : $\Delta t = 2{,}3\,\mathrm{ms}$.

5. Pour les graphes de $i_1(t)$ et $u_R(t)$, on choisit $R/r = 10$ pour plus de lisibilité.



6. La puissance instantanée fournie par la batterie est $\mathcal{P}(t) = Ei(t)$, où $i(t)$ est l'intensité du courant qui la traverse. On a

$$\begin{cases} \mathcal{P}(t) = E\left(\frac{E}{R} + \frac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right) & \text{pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[, \\ \mathcal{P}(t) = 0 & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}.$$

Sur une période, l'énergie $\mathcal{E}_T$ fournie par la batterie vaut

$$\mathcal{E}_T = \int_0^T \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t + 0 \approx \frac{E^2}{R}\frac{T}{2} + \frac{E^2}{r}\left(\frac{T}{2} - \tau\right),$$

A.N. : $\mathcal{E}_T = 5{,}8\,\mathrm{J}$. L'approximation vient du fait que l'on considère qu'en $t = T/2 \sim 5\tau$, le régime permanent est établi.
L'énergie totale stockée par la batterie vaut $\mathcal{E}_{\text{tot}} = QE \approx 1{,}9\,\mathrm{MJ}$.

L'autonomie T_{tot} du système s'exprime donc finalement

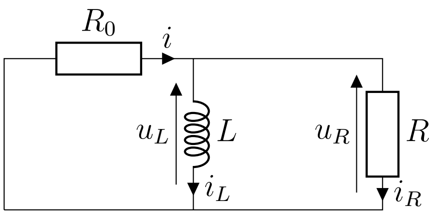
$$\boxed{T_{\text{tot}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathcal{E}_T} T.}$$

A.N. $T_{\text{tot}} \approx 3{,}3 \times 10^5\,\text{s}$, soit 3,9 jours.

7. Quand l'interrupteur est fermé, l'intensité du courant dans le circuit n'est pas nulle ce qui conduit à des pertes d'énergie par effet Joule. On peut raccourcir la durée T_f pendant laquelle l'interrupteur est fermé : en choisissant $T_\text{f} = 3\tau$, la bobine accumulera 95 % de l'énergie maximale obtenue en régime permanent, ce qui ne réduira que faiblement la tension maximale de l'impulsion, tout en prolongeant la durée de fonctionnement du dispositif. En effet, on peut alors montrer qu'avec une telle modification, la batterie aura une autonomie avoisinant 7,7 jours.

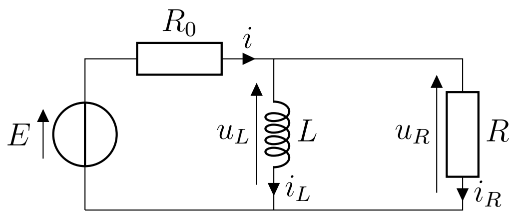
Exercice 8 – Circuit RL parallèle

Pour $t < 0$, le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



Les intensités et tensions sont toutes nulles en régime permanent. En particulier l'intensité i_L du courant dans la bobine est nul. Par continuité de l'intensité du courant traversant une bobine, on en déduit $i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-) = 0$.

Pour $t \geqslant 0$ le circuit devient :



On a $u_R = u_L$ car la bobine et la résistance R sont montées en dérivation. L'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans la bobine s'obtient en appliquant la loi des mailles dans la maille de gauche et la loi des nœuds :

$$E = R_0 i + u_L \quad \text{et} \quad i = i_L + i_R = i_L + \frac{u_L}{R}.$$

En utilisant la loi de comportement de la bobine, on obtient après calcul

$$\frac{1}{\tau}\frac{E}{R_0} = \frac{i_L}{\tau} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L(R+R_0)}{RR_0}.$$

La solution générale est de la forme

$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R_0}.$$

Avec la condition initiale, on obtient

$$i_L(t=0) \underset{\text{sol}^\circ}{=} A + \frac{E}{R_0} \underset{\text{C.I.}}{=} 0,$$

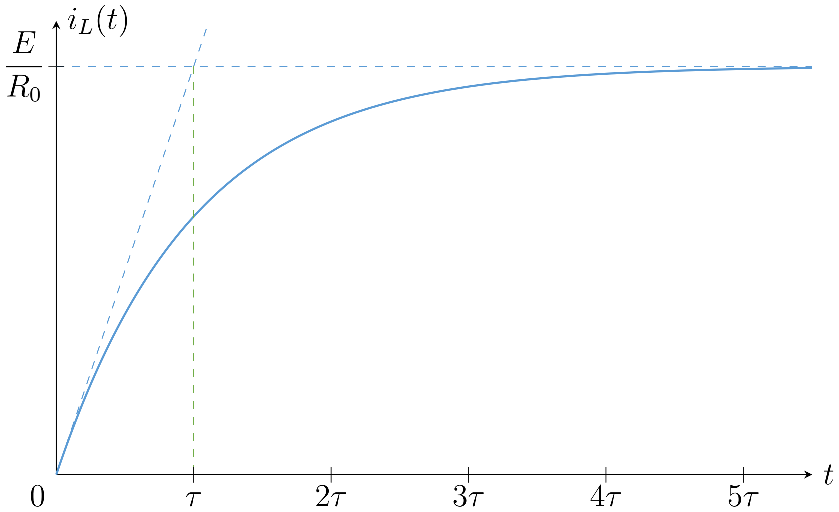
soit finalement

$$\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L(R+R_0)}{RR_0}.}$$

Cette expression est compatible avec le comportement asymptotique du circuit.

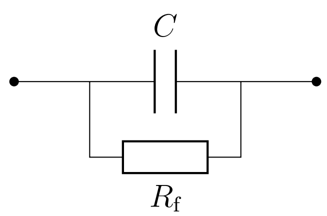
L'expression de $i_L(t)$ suffit à déterminer l'expression de toutes les autres grandeurs électriques dans le circuit. Par exemple :

- la tension $u_L(t)$ s'obtient avec la loi de comportement de la bobine ;
- on a $u_R(t) = u_L(t)$, l'intensité $i_R(t)$ du courant dans R s'obtient avec la loi d'Ohm ;
- l'intensité $i(t)$ du courant traversant le générateur s'obtient avec la loi des nœuds $i(t) = i_R(t) + i_L(t)$ et la tension aux bornes de la résistance R_0 s'obtient avec la loi d'Ohm.



Exercice 9 – Résistance de fuite d'un condensateur

1. L'isolant séparant les deux armatures n'est pas parfait et des charges passent d'une armature à l'autre, entrainant la décharge du condensateur.
2. L'isolant imparfait peut être assimilé à une résistance. Pour modéliser le condensateur réel, cette résistance ne peut être en série avec un condensateur idéal : quand le circuit est ouvert, il ne pourrait y avoir de transfert de charge. Cette résistance R_f doit donc nécessairement être associée en parallèle du condensateur idéal. Le condensateur réel peut donc être modélisé par l'association représentée ci-dessous.



3. Quand le condensateur réel est débranché, on retrouve un circuit RC série sans source. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est donc $u(t) = Ee^{-t/\tau}$, avec $\tau = R_\mathrm{f}C$. La durée Δt est la durée nécessaire pour que le condensateur soit déchargé à 90 %, soit

$$u(\Delta t) = Ee^{-\Delta t/\tau} = \frac{E}{10}.$$

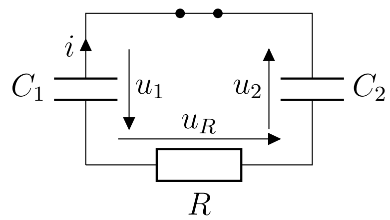
On a donc

$$\tau = \frac{\Delta t}{\ln 10}, \quad \text{soit} \quad \boxed{R_\mathrm{f} = \frac{\Delta t}{C \ln 10}.}$$

A.N. : $R_\mathrm{f} = 520\,\mathrm{G\Omega}$. On retrouve une résistance très élevée, ce qui indique que l'isolant utilisé est tout de même bien un mauvais conducteur électrique.

Exercice 10 – Décharge d'un condensateur dans un autre

1. Pour, $t > 0$, l'interrupteur est fermé, le circuit est équivalent à



La loi des mailles s'écrit $u_1 + u_2 + Ri = 0$. On la dérive et on la multiplie par C_1C_2 pour faire apparaitre la loi de comportement des condensateurs :

$$C_1C_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + C_1C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + RC_1C_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C_2 i + C_1 i + RC_1C_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0,$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}.}$$

2. En $t = 0^-$, le condensateur C_1 a une charge Q_0 sur l'armateur du haut, d'où $u_1(t = 0^-) = -Q_0/C_1$. L'autre condensateur est déchargé, soit $u_2(t = 0^-) = 0$. Les tensions sont les mêmes en $t = 0^+$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue.
En $t = 0^+$, la tension aux bornes de la résistance s'obtient en appliquant la loi des mailles. On en déduit l'intensité du courant qui parcourt le circuit en $t = 0^+$ avec la loi d'Ohm :

$$i(t = 0^+) = \frac{Q_0}{RC_1}.$$

On résout le problème de Cauchy, pour obtenir

$$\boxed{i(t) = \frac{Q_0}{RC_1}e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}.}$$

3. En régime permanent, l'intensité du courant est nulle, d'où $u_2 = -u_1$. On a donc $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$.
   D'autre part, la charge totale est conservée car le système est fermé, d'où $Q_0 = Q_1 + Q_2$. On obtient après calcul

$$\boxed{Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0.}$$

   On retrouve ces résultats en repassant par la définition de l'intensité en fonction de la charge. Par exemple pour C_2, on écrit

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}, \quad \text{d'où, en intégrant,} \quad Q_2 - q_2(0) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty i(t)\mathrm{d}t = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0,$$

   avec $q_2(0) = 0$ compte tenu des conditions initiales.
4. Avant la fermeture de l'interrupteur, toute l'énergie est stockée par le condensateur C_1, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{Q_0^2}{2C_1}.}$$

   En régime permanent, les deux condensateur stockent une partie de l'énergie restante $\mathcal{E}_\infty$:

$$\boxed{\mathcal{E}_\infty = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q_0^2}{2(C_1 + C_2)}.}$$

   On trouve :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = -\frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)} < 0.}$$

   La variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ du système est négative : **le système a perdu de l'énergie**.
5. L'énergie perdue a été **dissipée par effet Joule** dans la résistance, sous la forme d'un transfert thermique depuis le circuit vers l'extérieur. On retrouve $\Delta\mathcal{E}$ en calculant l'opposé de l'énergie reçue par la résistance :

$$\Delta\mathcal{E} = -\int_0^\infty R i^2 \mathrm{d}t = -\frac{Q_0^2 \tau}{R C_1^2} = -\frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)}.$$

6. Pour une valeur de résistance R faible, le temps caractéristique d'évolution de l'intensité dans le circuit devient trop faible pour que l'on puisse se placer dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Les lois de l'électrocinétique doivent être modifiées pour tenir compte de tous les effets.
   Pour une valeur de résistance nulle, **l'énergie perdue est rayonnée sous la forme d'ondes électromagnétiques**.