TD O2 – Lentilles minces
Correction

Miroirs et lentilles minces

Exercice 1 – Constructions illimitées

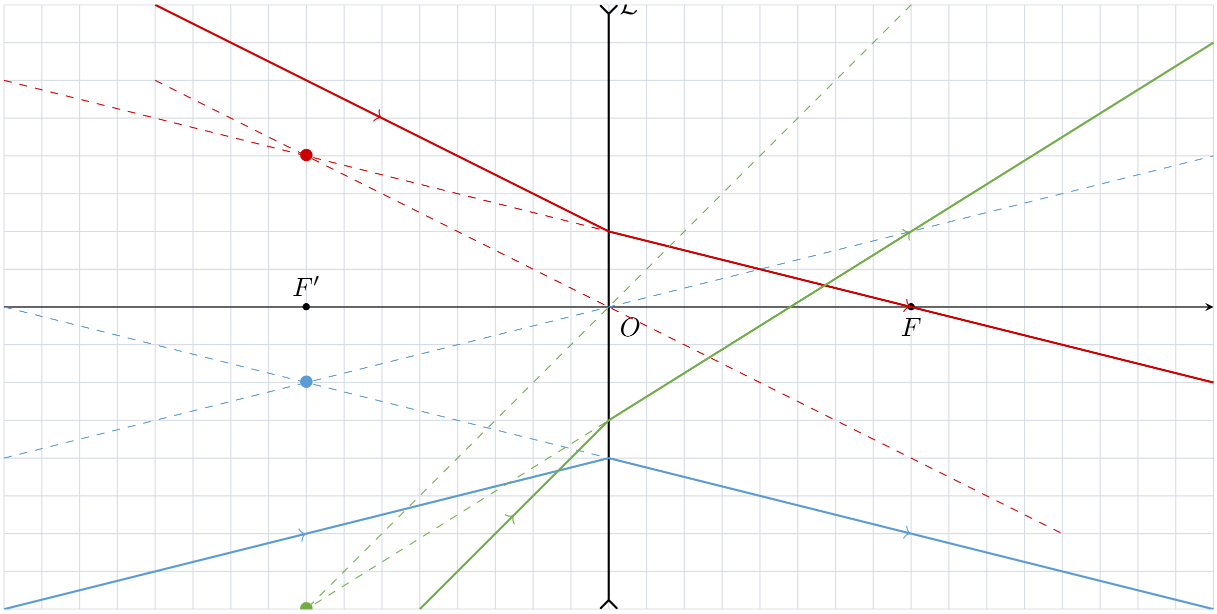
Exercice 2 – Manipuler les relations de conjugaison

1. On utilise la relation de conjugaison de Descartes pour exprimer la distance lentille-objet
$$\boxed{\overline{OA} = \frac{f' \cdot \overline{OA'}}{f' - \overline{OA'}}.}$$
A.N. : $\overline{OA} = -75\,\mathrm{cm}$.
La relation de Descartes sur le grandissement donne la taille de l'image
$$\boxed{\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.}$$
A.N. : $\overline{A'B'} = -6{,}0\,\mathrm{cm}$.
2. En utilisant la relation de Chasles, on a
$$-\overline{OA} + \overline{OA'} = \overline{AA'} = 90\,\mathrm{cm}$$
La relation de Descartes sur le grandissement donne une relation entre $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$:
$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -2,$$
où le signe « $-$ » traduit le fait que dans la situation décrite, l'image est nécessairement renversée.
La relation de conjugaison de Newton donne immédiatement la distance focale de la lentille en fonction de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$. Après calcul, on obtient
$$\boxed{\overline{OA} = \frac{\overline{AA'}}{\gamma - 1},} \quad \boxed{\overline{OA'} = \gamma\frac{\overline{AA'}}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{f' = -\gamma\frac{\overline{AA'}}{(\gamma - 1)^2}.}$$
A.N. : $\overline{OA} = -30\,\mathrm{cm}$, $\overline{OA'} = 60\,\mathrm{cm}$ et $f' = 20\,\mathrm{cm}$.

Exercice 3 – Marche des rayons émergents d'une lentille divergente

La méthode est identique à celle mise en œuvre dans l'App. 6 pour la lentille convergente : on imagine que le rayon provient d'une source ponctuelle située à l'infini. Son image se situe à l'intersection entre un rayon parallèle passant par le centre optique et le plan focal image. L'image est virtuelle. Il suffit alors de prolonger le rayon considéré de sorte qu'il passe par l'image obtenue.

En comparant ce tracé à celui de l'App. 6 on vérifie une lapalissade : les rayons convergent en sortie d'une lentille convergente, ils divergent en sortie d'une lentille divergente.

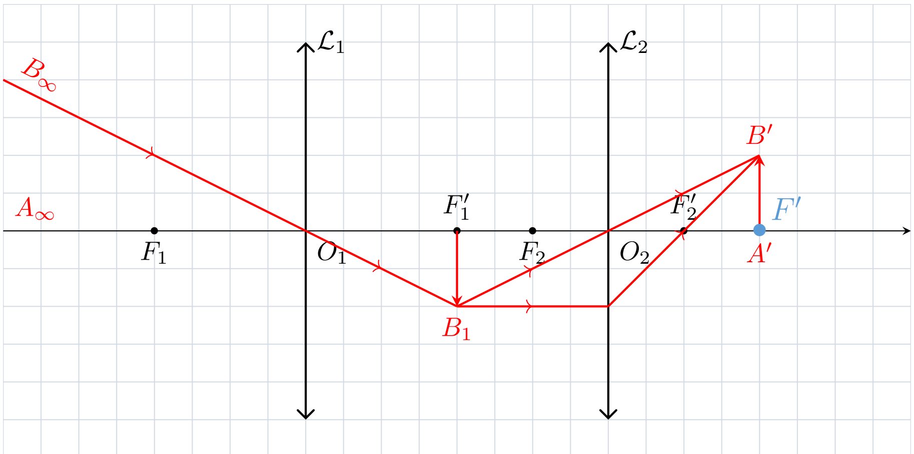


Exercice 4 – Doublet de lentilles accolées

Corrigé en classe.

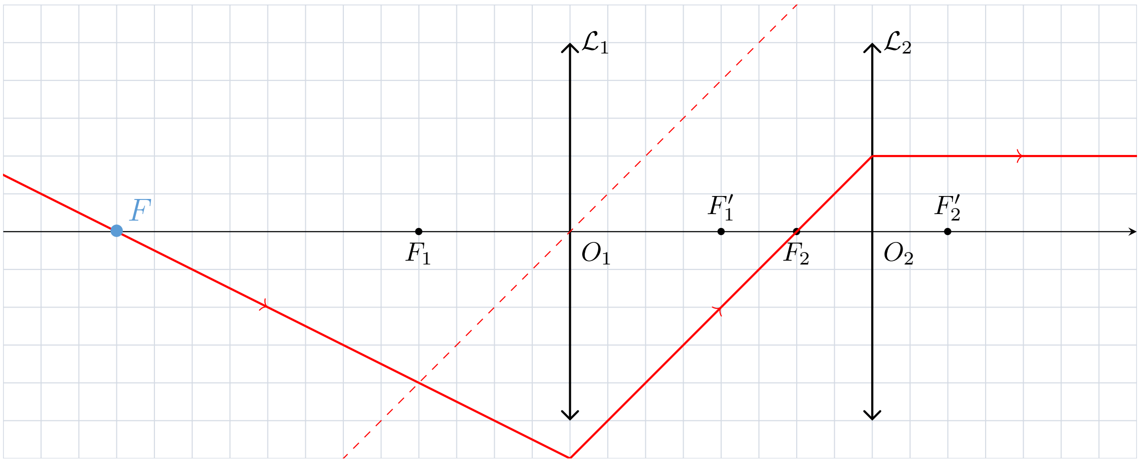
Exercice 5 – Doublet de lentilles

1. Pour obtenir la position du foyer image F' de l'ensemble, on cherche l'image d'un objet AB situé à l'infini dans la direction de l'axe optique, ou on représente la marche d'un rayon parallèle à l'axe optique issu de A. Avec la première méthode.



Le foyer image se situe en A'.

Pour obtenir la position du foyer objet F de l'ensemble, on cherche le point F de l'axe optique qui donne une image à l'infini, donc un rayon parallèle à l'axe optique. On peu remonter le système optique en vertu du principe de retour inverse de la lumière. Avec la deuxième méthode cette fois.



Les foyers objet et image vérifient :

$$\boxed{\overline{O_2F'} = 2{,}0\,\text{cm} \quad \text{et} \quad \overline{O_1F} = -6{,}0\,\text{cm}.}$$

2. On considère un objet A à l'infini sur l'axe optique : son image par le doublet est F'. On a donc

$$A(\infty) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'.$$

On a immédiatement $\overline{O_1A_1} = f'_1$, puis, avec la relation de conjugaison de Descartes

$$\overline{O_2F'} = \frac{f'_2 \cdot \overline{O_2A_1}}{f'_2 + \overline{O_2A_1}}.$$

Finalement, en appliquant Chasles, $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -d + \overline{O_1A_1}$, d'où

$$\boxed{\overline{O_2F'} = \frac{f'_2(f'_1 - d)}{f'_2 + f'_1 - d}.}$$

A.N. : $\overline{O_2F'} = 2{,}0\,\text{cm}$.
De même, on cherche le point F de l'axe optique qui donne une image à l'infini :

$$F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty.$$

On obtient par un raisonnement similaire

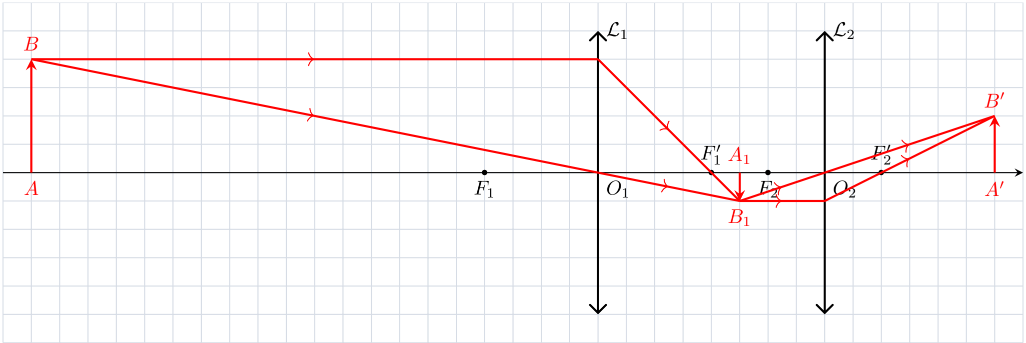
$$\boxed{\overline{O_1F} = \frac{f'_1(d - f'_2)}{f'_1 - d + f'_2}.}$$

A.N. : $\overline{O_2F} = -6{,}0\,\text{cm}$.
Ces résultats sont en accord avec la méthode graphique de la question précédente.
Rq : en utilisant les relations de conjugaison de Newton, on obtient des résultats équivalents, où les distance sont repérées par rapport aux foyers :

$$\overline{F'_2F'} = -\frac{f'^2_2}{f'_1 + f'_2 - d} = 1{,}0\,\text{cm} \quad \text{et} \quad \overline{F_1F} = -\frac{f'^2_1}{d - f'_1 - f'_2} = -4{,}0\,\text{cm}.$$

3. On obtient graphiquement

$$\boxed{\overline{O_1A_1} = 2{,}5\,\mathrm{cm} \quad \text{et} \quad \overline{O_2A'} = 3{,}0\,\mathrm{cm}.}$$



4. En appliquant la relation de conjugaison de Descartes à $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1$, on obtient directement

$$\boxed{\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \cdot f_1'}{\overline{O_1A} + f_1'}.}$$

En appliquant la même loi à $A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$ et avec Chasles, on obtient finalement après calcul

$$\boxed{\overline{O_2A'} = \frac{f_2'(\overline{O_1A} \cdot f_1' - d \cdot \overline{O_1A} - df_1')}{\overline{O_1A} \cdot f_1' + (f_2' - d)(f_1' + \overline{O_1A})}.}$$

Les applications numériques redonnent les résultats obtenus graphiquement.

5. Sur la construction graphique précédente, on lit $\overline{A'B'} = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, d'où $\gamma = +0{,}5$.
En utilisant les relations de Descartes sur le grandissement, on a

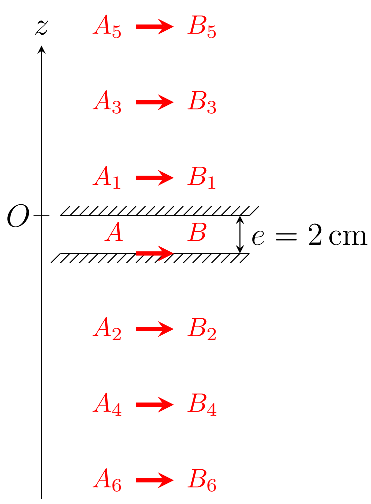
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \cdot \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_1A_1} - d} \cdot \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}.}$$

L'application numérique donne le même résultat que la lecture graphique.

6. Les deux images A_1B_1 et $A'B'$ sont réelles.

Exercice 6 – « Miroir infini »

1.



2. On ne voit que les images correspondant à des i pairs. Pour s'en convaincre, il faut tracer le trajet des rayons lumineux après les différentes réflexions. On se convainc alors rapidement que seul ceux issus des images « sous » les miroirs peuvent parvenir jusqu'à l'œil. Les autres se propagent vers le bas et n'arrivent à l'œil qu'après une réflexion supplémentaire.
3. Sur le schéma on voit, pour un œil situé à une distance d au dessus du miroir supérieur et dans le cadre de l'approximation des petits angles

$$\alpha_i \approx \frac{d}{z+(i+1)e}.$$

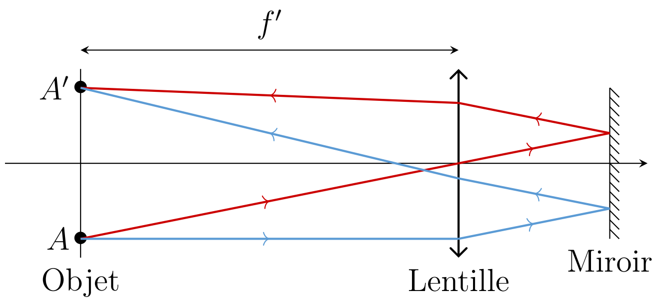
AN : $\alpha_{10} \approx 2{,}1 \times 10^{-2}$.
4. Une partie de la lumière est transmise par les miroirs à chaque réflexion.

Exercice 7 – Focométrie

1. **Autocollimation**
On a

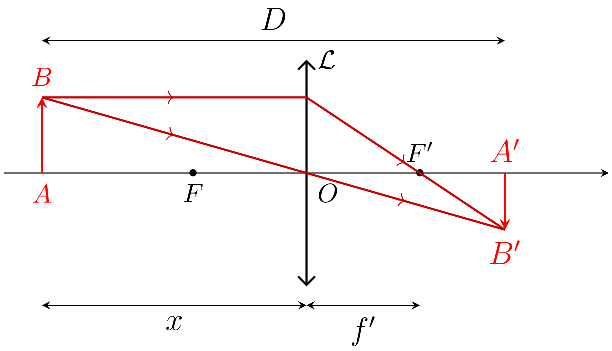
$$A \xrightarrow{\mathcal{L}} A_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} A_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} A'.$$

On suppose que la distance objet-lentille est égale à la distance focale de la lentille. L'image A_1 est alors à l'infini car A est dans le plan focal objet de $\mathcal{L}$. L'image A_2 formée par le miroir est également à l'infini car symétrique de A_1 par rapport au miroir. Finalement, l'image A' de A_2 par la lentille est dans le plan focal image de la lentille (à gauche de la lentille car le sens des rayons lumineux est inversé après réflexion sur le miroir).
L'image A' et l'objet A sont dans le même plan si la distance objet-lentille est égale à la distance focale.



Pour expérimenter : phyanim.sciences.univ-nantes.fr

2. On note x la distance positive entre l'objet et la lentille. La distance D entre l'objet et l'écran est fixe et on cherche la ou les valeurs de x de la lentille qui permettent d'obtenir une image nette sur l'écran.



Sur le schéma, on voit que $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = D - x$: la relation de conjugaison de Descartes s'écrit

$$\frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - xD + Df' = 0.$$

Le discriminant $\Delta = D(D - 4f')$ est du même signe que $D - 4f'$ ($D > 0$).
Plusieurs cas sont alors possibles :

- $\Delta > 0$, c'est-à-dire $D > 4f'$: il existe deux positions de la lentille qui permettent d'obtenir une image nette sur l'écran, telles que :
$$x_\pm = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2}.$$
- $\Delta = 0$, c'est-à-dire $D = 4f'$: il existe une position qui permet d'obtenir une image nette, telle que :
$$x = \frac{D}{2}.$$
- $\Delta < 0$, c'est-à-dire $D < 4f'$: il n'est pas possible de placer la lentille de manière à obtenir une image nette sur l'écran.

On retrouve donc bien que **la distance D séparant un objet réel de son image réelle ne peut être inférieure à** $4f'$.

3. **Méthode de Bessel**
Il s'agit du cas $\Delta > 0$ étudié précédemment. On en déduit immédiatement
$$d = x_+ - x_- = \sqrt{D(D-4f')}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}.}$$
Avec la relation de Descartes, le grandissement s'écrit
$$\gamma_\pm = -\frac{D - x_\pm}{x_\pm},$$
soit
$$\gamma_+ = -\frac{D - \sqrt{D(D-4f')}}{D + \sqrt{D(D-4f')}} \quad \text{et} \quad \gamma_- = -\frac{D + \sqrt{D(D-4f')}}{D - \sqrt{D(D-4f')}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma_+ = \frac{1}{\gamma_-}.}$$

4. **Méthode de Silbermann**
Il s'agit du cas $\Delta = 0$ étudié précédemment pour lequel il n'existe qu'**une position** $x = D/2$ de la lentille permettant d'obtenir une image nette sur l'écran. Le grandissement vaut alors $\mathbf{-1}$.

Exercice 8 – Miroir et lentille

On s'intéresse à l'ensemble

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}} A' \xrightarrow{\mathcal{M}} A'' \xrightarrow{\mathcal{L}} A_{1,2}.$$

On repère par la position de l'objet A par son abscisse x, repérée par rapport au centre O de la lentille, de telle sorte que $\overline{OA} = x$. (x est donc négatif si A est situé avant la lentille, positif sinon.)

La relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués A et A' donne

$$\overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} = \frac{f'x}{f'+x}.$$

Le point A'' est symétrique de A' par rapport à S, d'où

$$\overline{SA''} = -\overline{SA'}, \quad \text{puis avec Chasles} \quad \overline{OA''} = 2d - \overline{OA'},$$

avec $d = \overline{OS}$.

On cherche les valeurs de x qui permettent d'obtenir une image $A_{1,2}$ qui coïncide avec l'objet A, c'est-à-dire telles que $\overline{OA_{1,2}} = x$. La relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués A'' et $A_{1,2}$ s'écrit donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{f'}.$$

En remplaçant, $\overline{OA''}$ et $\overline{OA'}$ avec les expressions obtenues précédemment et après calcul, on obtient l'équation

$$dx^2 + f'^2 x - df'^2 = 0.$$

Ses solutions $x_\pm$ donnent les positions des images A_1 et A_2. La résolution donne

$$x_\pm = \frac{f'^2}{2d}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4d^2}{f'^2}}\right).$$

La distance a entre ces deux positions vaut

$$a = x_+ - x_- = \frac{f'^2}{d}\sqrt{1 + \frac{4d^2}{f'^2}}.$$

Rq : l'une des valeurs de x est positive, ce qui veut dire que l'une des positions où l'objet A et l'image $A_{1,2}$ sont confondus est située entre la lentille et le miroir. Cette position serait impossible à observer expérimentalement.

En élevant au carré, on obtient une nouvelle équation du deuxième ordre en f'^2 :

$$f'^4 + 4d^2 f'2 + a^2 d^2 = 0, \quad \text{soit, avec } X = f'^2, \quad X^2 + 4d^2 X - a^2 d^2 = 0.$$

La résolution donne deux racines

$$X_\pm = 2d^2\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{a^2}{4d^2}}\right).$$

Seule la racine X_+ convient puisqu'on cherche une distance focale f' réelle et positive et on obtient finalement

$$\boxed{\sqrt{2d^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{a^2}{4d^2}}\right)}.}$$

A.N. : $f' = 48\,\text{cm}$.

Systèmes optiques

Exercice 9 – Loupe

1. Pour une observation confortable, l'image se situe à l'infini, donc l'objet doit être dans le plan focal objet de la lentille, d'où

   $$\boxed{d = f' = \frac{1}{V}.}$$

   A.N. : $d = 10\,\text{cm}$.

2. Pour un objet suffisamment petit de taille a situé à une distance f' de la loupe, on a à travers la loupe

   $$\alpha' \approx \frac{a}{f'}.$$

   D'autre part, si cet objet se situe au PP, on a

   $$\alpha_{\text{PP}} \approx \frac{a}{d_{\text{PP}}}.$$

   Finalement,

   $$\boxed{G_{\text{c}} = \frac{d_{\text{PP}}}{f'}.}$$

   A.N. : $G_{\text{c}} = 2{,}5$.

Exercice 10 – Limites et défauts de l'œil

1. On note h la taille minimale recherchée. Elle est liée à la résolution ε de l'œil par la relation suivante, simplifiée avec l'approximation des petits angles

   $$\varepsilon \approx \frac{h}{D},$$

   d'où

   $$\boxed{h \approx \varepsilon D.}$$

   A.N. : $h = 6\,\text{cm}$.

2. Pour un objet au PR, l'œil n'accommode pas, l'image se forme dans le plan focal du cristallin dont la distance focale doit correspondre à la distance cristallin-rétine : la distance focale du cristallin est maximale et vaut d.

   On souhaite de plus qu'en accommodant au maximum, l'image d'un objet au PP se forme sur la rétine. La relation de conjugaison de Descartes donne alors : $f' = \frac{d d_{\mathrm{PP}}}{d + d_{\mathrm{PP}}} \approx 1{,}6\,\mathrm{cm}$. La distance focale du cristallin varie donc entre **1,6 cm et 1,7 cm**.

3. Si la vergence du cristallin est plus faible, sa distance focale est plus grande. Un objet à l'infini donne une image dans le plan focal image qui sera donc situé **après la rétine**.

4. Pour que le verre apporte la correction demandée, il faut que l'image qu'il forme d'un objet situé à l'infini se situe au PR de l'œil myope, soit à une distance $d_{\mathrm{PR}} - d_{\mathrm{c}} = 25\,\mathrm{cm}$ avant l'œil. C'est le cas si le verre est une lentille de distance focale $-25\,\mathrm{cm}$. En terme de vergence, on a

$$\boxed{V = \frac{1}{d_{\mathrm{c}} - d_{\mathrm{PR}}}.}$$

   A.N. : $V = -4\,\delta$: il s'agit d'une lentille divergente.

Exercice 11 – Lunette de Galilée

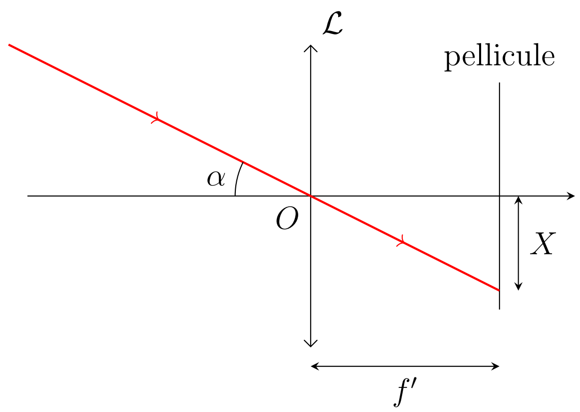
Corrigé en classe.

Exercice 12 – Appareil photo jetable

1. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image de la lentille, il faut donc

$$\boxed{d = f'.}$$

2. On représente l'appareil photo, dont l'axe pointe le bord inférieur de la Lune.



   Avec l'approximation des petits angles, on a

$$X \approx f'\alpha$$

   A.N. : $X = 0{,}26\,\mathrm{mm}$.

3. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}, \quad \text{soit, avec } \overline{OA} = -d_A, \quad \boxed{\overline{OA'} = \frac{f' d_A}{d_A - f'}.}$$

4. La relation précédente se réécrit, en posant $d_{A'} = \overline{OA'}$,

$$d_A = \frac{f' d_{A'}}{d_{A'} - f'}$$

Avec le théorème de Thalès, on a

$$\frac{d_{A'}}{D_\mathrm{L}} = \frac{d_{A'} - f'}{D_{A'}}, \quad \text{soit} \quad \frac{d_{A'}}{d_{A'} - f'} = \frac{D_\mathrm{L}}{D_{A'}}.$$

En combinant les deux relations, on obtient

$$d_A = f' \frac{D_\mathrm{L}}{D_{A'}}, \quad \text{ou encore} \quad \boxed{D_{A'} = f' \frac{D_\mathrm{L}}{d_A}.}$$

5. On exploite la relation obtenue précédemment, avec $D_{A'} = \varepsilon$. On obtient

$$\boxed{d_A = f' \frac{D_\mathrm{L}}{\varepsilon}.}$$

A.N. : $d_A = 3{,}0\,\mathrm{m}$.
Cette relation montre bien l'intérêt d'utiliser une lentille de faible diamètre, car sans modifier la mise au point, on peut obtenir une image nette d'un objet relativement proche. En contrepartie, la quantité de lumière qui arrive sur la pellicule est faible : les appareils photo jetables fonctionnent bien en extérieur mais sont rapidement limités en intérieur.

Exercice 13 – Microscope

1. On commence par construire les images successives de AB par le système optique (traits de construction rouge), puis on représente la marche des rayons, déviés par les lentilles passant par les images intermédiaires (bleu, vert et orange, Fig. 1 et 2).
La deuxième situation convient mieux pour un microscope : l'œil situé immédiatement à droite de l'oculaire est incapable de voir une image située derrière lui, comme c'est le cas dans la situation 1.

2. On applique la relation de conjugaison de Descartes pour le couple (A, A') conjugués par $\mathcal{L}_1$:

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \cdot f_1'}{f_1' + \overline{O_1A}}.}$$

A.N. : $\overline{O_1A_1} = 16{,}4\,\mathrm{cm}$.

De même, pour le couple (A_1, A') conjugués par $\mathcal{L}_2$:

$$\boxed{\overline{O_2A'} = \frac{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}) \cdot f_2'}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} + f_2'}.}$$

A.N. : $\overline{O_2A'} = -36{,}0\,\text{cm}$. L'image est virtuelle et relativement éloignée.
On en déduit le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}.$$

A.N. : $\gamma = -400$. On obtient un grandissement élevé, qui montre tout l'intérêt du microscope.

3. Si on veut que l'image (virtuelle) soit à l'infini, A_1B_1 doit se former dans le plan focal objet de l'oculaire $\mathcal{L}_2$, soit $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} = 16{,}0\,\text{mm}$.
Avec la relation de conjugaison, cela implique que l'objet soit en A tel que :

$$\overline{O_1A} = \frac{f_1' \cdot \overline{O_1A_1}}{f_1' - \overline{O_1A_1}} = -4{,}102\,\text{mm},$$

ce qui est finalement très proche de la position précédente (mais comme A est proche de F_1, la position de A_1 est très sensible).

4. Lorsqu'on observe au PR (à l'infini), l'objet a la position calculée précédemment : $\overline{O_1A} = -4{,}102\,\text{mm}$.
Pour une observation au PP, l'œil étant placé au foyer image F_2', on doit avoir $\overline{A'F_2'} = d_{\text{PP}}$.
D'après la relation de conjugaison de Newton, $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F_2'A'} = -f_2'^2$, soit

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} + \overline{F_2A_1} = D - f_2' + \frac{f_2'^2}{d_{\text{PP}}} = 16{,}64\,\text{cm}.$$

Et avec la relation de conjugaison de Descartes appliquée à (A, A_1), on récupère la position de l'objet AB correspondante :

$$\boxed{\overline{O_1A} = \frac{f_1' \cdot \overline{O_1A_1}}{f' - 1 - \overline{O_1A_1}}.}$$

A.N. $\overline{O_1A} = -4{,}098\,\text{mm}$. On en déduit que $\Delta x = 4\,\mu\text{m}$. C'est très faible, ce qui explique le recours à une vis micrométrique pour faire la mise au point.

5. D'après le schéma Fig.3, on a

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{-\overline{A_1B_1}}{f_2'},$$

et comme

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_1,$$

on a :

$$\boxed{P_i = \frac{-\gamma_1}{f_2'}.}$$

A.N. : $P_i = 980\,\delta$.

6. Le grossissement est $G = \alpha'/\alpha$ avec

$$\alpha' \approx \frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'} \quad \text{et} \quad \alpha \approx \frac{\overline{A_B}}{d_{\text{PP}}} \quad \text{(vision à l'œil nu).}$$

On a donc

$$\boxed{G = \frac{-\gamma_1 \; d_{\text{PP}}}{f_2'} = P_i \; d_{\text{PP}}.}$$

A.N. : $G = 240$.

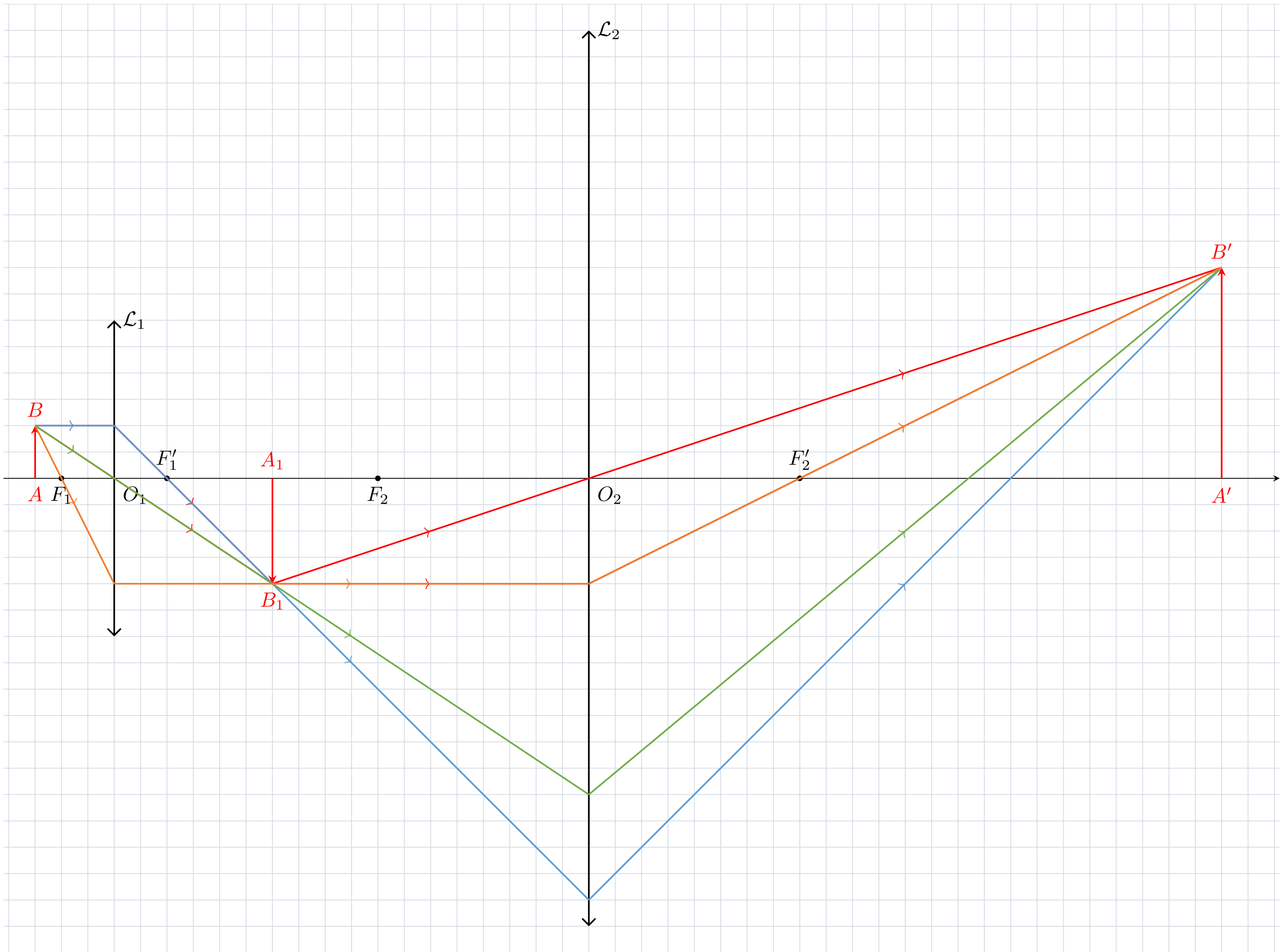


Figure 1 – Avec D telle que A_1B_1 se forme entre O_1 et F_2.

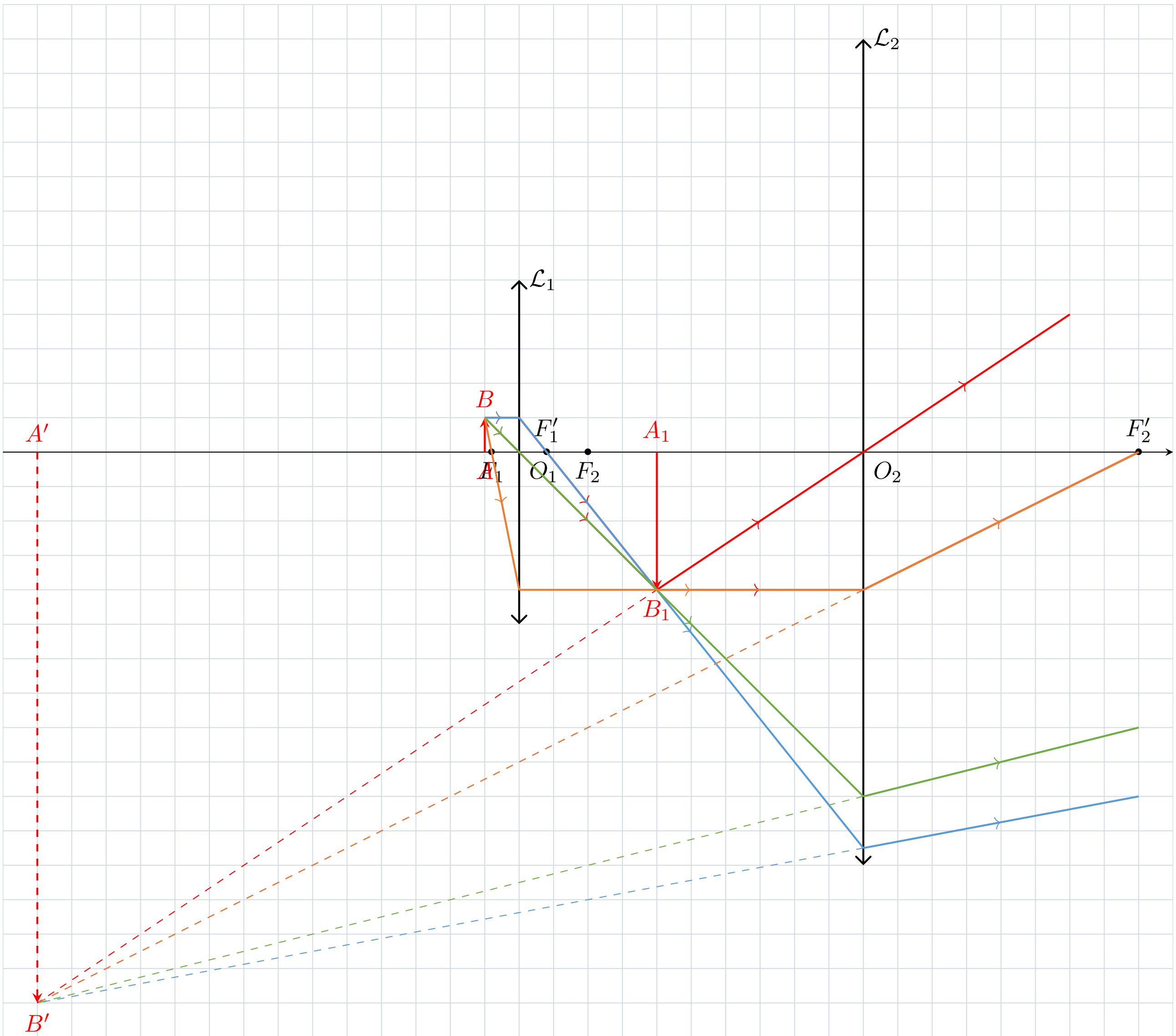


FIGURE 2 – Avec D telle que A_1B_1 se forme entre O_2 et F_2.

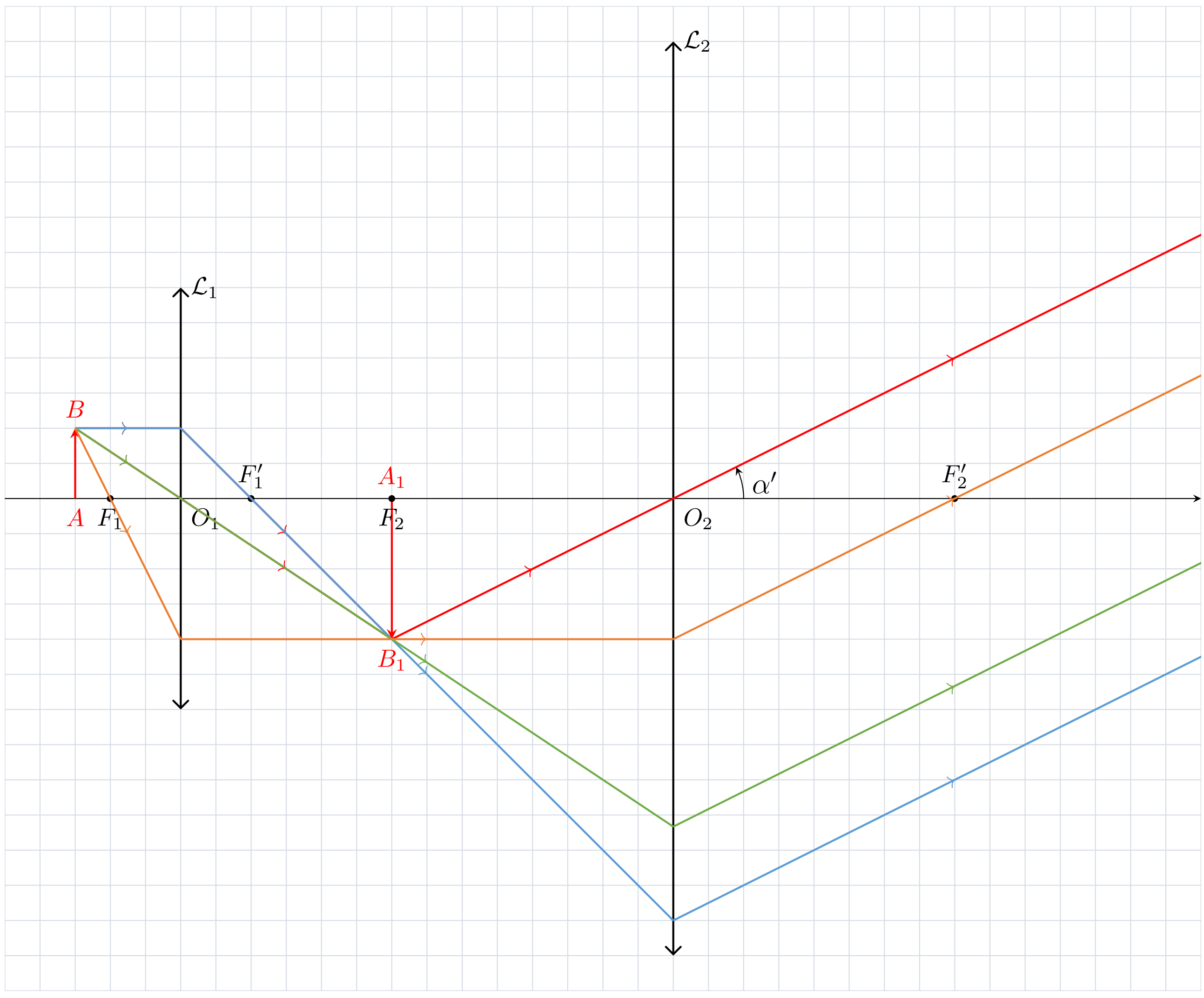


Figure 3 – Microscope réglé pour la vision à l'infini.