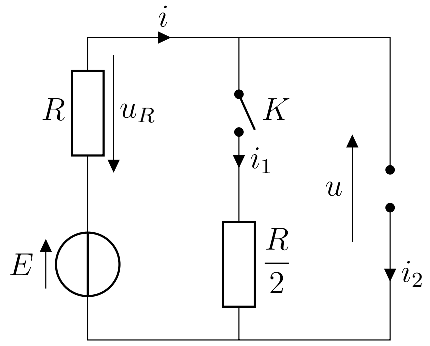
DM06 – Régimes transitoires

Exercice 1 – Charge ou décharge ?

1. Avant la fermeture de l'interrupteur K, le régime permanent est établi. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert, donc le circuit en $t = 0^-$ est équivalent à :



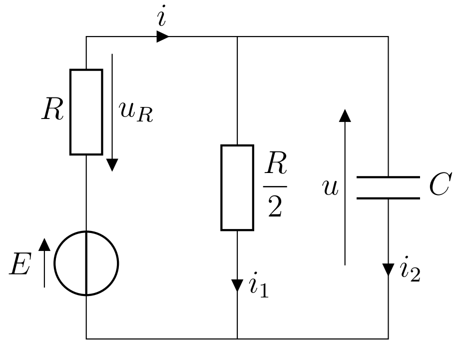
Les intensités i_1 et i_2 sont alors nulles, car les branches associées sont ouvertes. La loi des nœuds indique que l'intensité i est nulle aussi. En appliquant la loi des mailles dans la « grande maille », on obtient

$$E = u_R + u.$$

Or $u_R = Ri = 0$ d'après la loi d'Ohm.
On a donc finalement, en $t = 0^-$

$$\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{u(0^-) = E.}$$

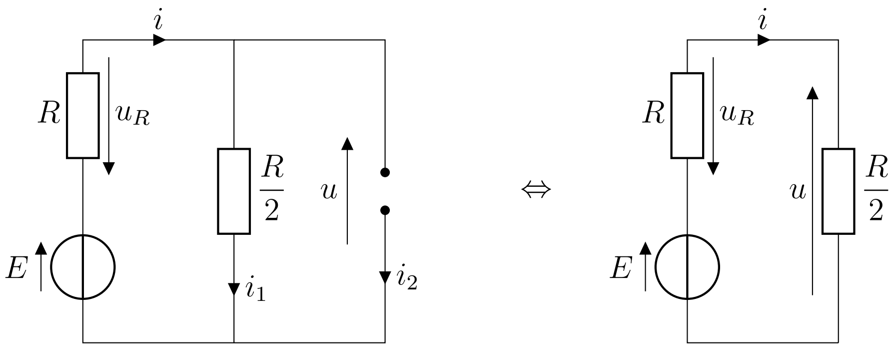
2. Une fois l'interrupteur K fermé et pendant le régime transitoire, le circuit devient



La tension aux bornes d'un condensateur est continue, d'où $u(0^+) = u(0^-) = E$.
La résistance $R/2$ est en parallèle du condensateur, donc la tension à ses bornes vaut u.
La loi d'Ohm en $t = 0^+$ permet d'obtenir $i_1(0^+) = 2E/R$.
La loi des mailles permet de déterminer la tension u_R. En $t = 0^+$, on a donc $u_R(0^+) = 0$ et $i(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm.
La loi des nœuds permet finalement d'obtenir $i_2(0^+) = -i_1(0^+)$.
On a donc finalement

$$\boxed{i(0^+) = 0, \quad i_1(0^+) = -i_2(0^+) = \frac{2E}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{u(0^+) = E.}$$

3. Une fois le nouveau régime permanent atteint, le circuit devient



On a alors $i_2(\infty) = 0$ car la branche est ouverte et $i(\infty) = i_1(\infty)$ par loi des nœuds.
On reconnait un pont diviseur de tension, d'où $u(\infty) = \frac{E}{3}$.
Finalement, la loi d'Ohm donne $i(\infty) = \frac{2E}{3R}$.

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{t\to\infty} i_1(t) = \frac{2E}{3R}, \quad \lim_{t\to\infty} i_2(t) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{E}{3}.}$$

4. On raisonne sur le circuit représenté pour la question 2. La loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2,$$

or :

$$i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(loi de comportement)}$$
$$i_1 = \frac{2u}{R} \qquad \text{(loi d'Ohm)}$$
$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{E-u}{R} \qquad \text{(loi des mailles et loi d'Ohm)}$$

On a donc

$$\frac{E}{RC} = \frac{3u}{RC} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{3}.}$$

5. On commence par trouver une solution $u_h(t)$ à l'équation homogène :

$$u_h(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Le second membre est constant : on cherche une solution particulière $u_p(t)$ constante.

$$u_p(t) = \frac{E}{3}.$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau} + \frac{E}{3}.$$

La constante U_0 s'obtient à l'aide de la condition initiale en $t = 0^+$

$$u(0) \underset{\text{sol°}}{=} U_0 + \frac{E}{3} \underset{\text{C.I}}{=} E, \quad \text{d'où} \quad U_0 = \frac{2E}{3}.$$

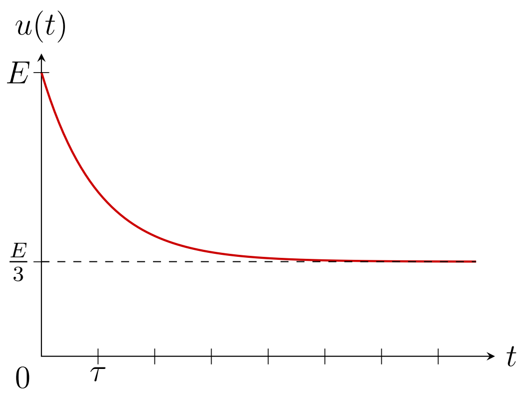
Finalement, la solution est

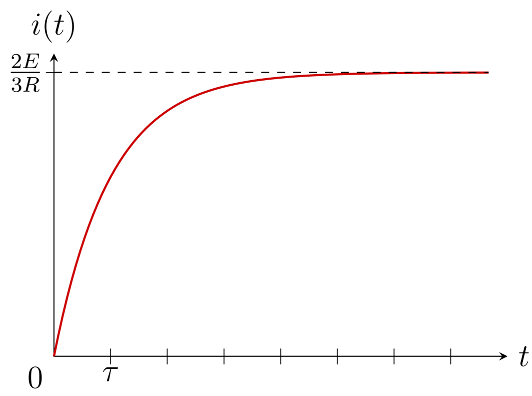
$$\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\left(1 + 2e^{-t/\tau}\right).}$$

6. On a

$$\boxed{i(t) = \frac{E - u(t)}{R} = \frac{2E}{3R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$$

7. Avec les deux expressions précédentes :





8. On a

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C\left(u^2(\infty) - u^2(0)\right) = -\frac{4}{9}CE^2.}$$

On obtient une valeur négative traduisant le fait que le condensateur a perdu de l'énergie : **il s'est déchargé**.

9. Le graphe ne peut pas être celui de la tension $u(t)$, mais il a la même allure que celui de $i(t)$. Avec la méthode des 63 %, on obtient

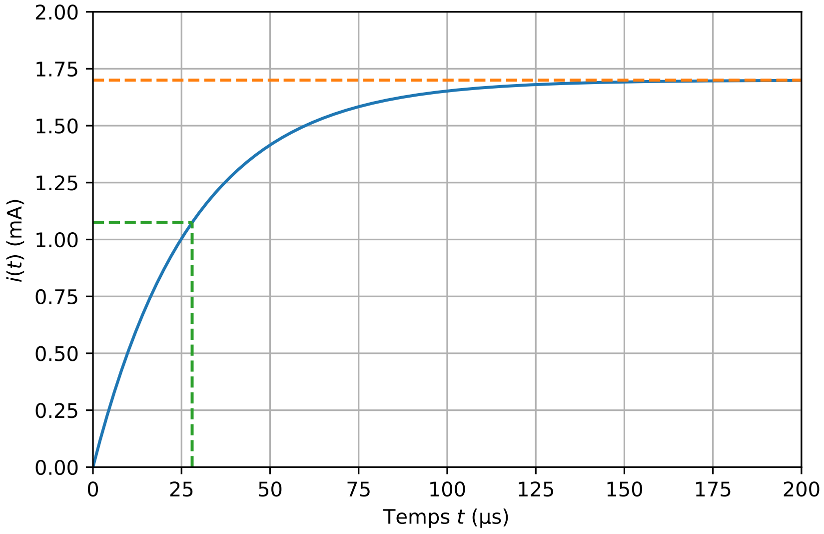
$$\boxed{\tau \approx 28\,\mu\text{s}.}$$

La valeur aux temps longs correspond à $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = \frac{2E}{3R}$. On lit graphiquement

$$\lim_{t\to\infty} i(t) \approx 1{,}7\,\text{mA}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{R \approx 2{,}0\,\text{k}\Omega.}$$

Finalement, avec $\tau = RC/3$, on déduit

$$\boxed{C \approx 43\,\text{nF}.}$$


2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$i(t)$ (mA)
0
25
50
75
100
125
150
175
200
Temps t (µs)