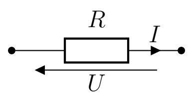
DM07 – Circuit du premier ordre
Correction

Exercice 1 – Guirlandes électriques

1. La puissance $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ dissipée par effet Joule dans une résistance R parcourue par un courant d'intensité I vaut

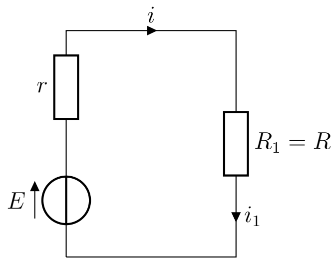
   $$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{J} = RI^2.}$$

   En effet, cette puissance correspond à la puissance reçue par la résistance.

   En convention récepteur, on a $\mathcal{P}_\mathrm{J} = UI$, avec $U = RI$ d'après la loi d'Ohm, d'où $\mathcal{P}_\mathrm{J} = RI^2$.

2. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, le circuit devient

   avec $I_o = i = i_1$. On a donc immédiatement par loi de Pouillet

   $$\boxed{I_o = \frac{E}{R+r}.}$$

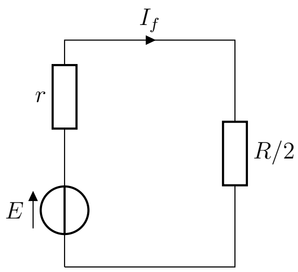
   On a donc

   $$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} = \frac{RE^2}{(R+r)^2}.}$$

   A.N. : $\mathcal{P}_{1,o} = 8{,}0\,\mathrm{W}$.
   L'intensité du courant qui traverse la guirlande R_2 est nulle, d'où

   $$\boxed{\mathcal{P}_{2,o} = 0.}$$

3. Lorsque l'interrupteur K est fermé, le circuit devient

Par loi de Pouillet, on a

$$\boxed{I_f = \frac{2E}{R+2r}.}$$

On reconnait un pont diviseur de courant entre deux résistance égales, d'où

$$\boxed{I_{1,f} = I_{2,f} = \frac{I_f}{2} = \frac{E}{R+2r}.}$$

4. On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,f} = \frac{RE^2}{(R+2r)^2}.}$$

A.N. : $\mathcal{P}_{1,f} = 4{,}5\,\mathrm{W}$.

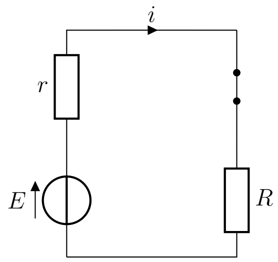
5. On remarque que $\mathcal{P}_{1,f} < \mathcal{P}_{1,o}$: la puissance électrique reçue par la guirlande R_1, donc la puissance lumineuse qu'elle fournie varie : **la guirlande R_1 clignote**.

6. On retrouve $\mathcal{P}_{1,f} \approx \mathcal{P}_{1,o}$ si

$$\boxed{r \ll R.}$$

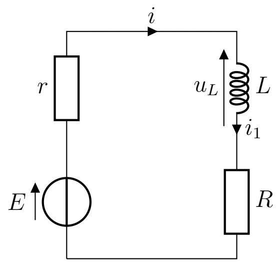
Le générateur est alors assimilé à une source idéale de tension.

7. En régime permanent le circuit devient



On retrouve le même circuit qu'à la question 2 : l'intensité i dans le circuit est la même que précédemment.

8. Sur l'intervalle $[0, T/2[$, le circuit est le suivant :



La loi des mailles s'écrit $E = (R+r)i_1 + u_L$. En utilisant la loi de comportement de la bobine, puis en divisant par L, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_1} = \frac{E}{L}, \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{L}{R+r}.}$$

9. En régime permanent, l'intensité i_1 est constante et l'équation devient

$$\boxed{\frac{i_1}{\tau_2} = \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)} \quad \text{d'où} \quad i_1 = \frac{E}{R+2r} = I_{1,f}.}$$

On retrouve l'expression obtenue à la question 3.

10. Les temps caractéristiques associés au circuit équipé de la bobine d'inductance L_2 sont bien plus grands que pour la bobine d'inductance L_1, or le temps caractéristique de la charge comme celui de la décharge est proportionnel à l'inductance. On en déduit

$$\boxed{L_1 < L_2.}$$

Pour déterminer l'inductance L_1, on mesure graphiquement le temps caractéristique τ_2 associé à la décharge de la bobine.

11. Pour limiter le clignotement de la guirlande R_1, il vaut mieux utiliser la **bobine d'inductance** L_2 pour laquelle l'intensité i_1, donc la puissance électrique reçue et la puissance lumineuse fournie est quasi-constante.

12. Graphiquement, on lit lors d'une décharge de la bobine L_1, avec la méthode de la tangente à l'origine ou celle des 37 % (Ann. 1). On a d'autre part

$$L = \frac{\tau_2(R+2r)}{1+\frac{r}{R}}.$$

A.N. : avec $\tau_2 = 37{,}5\,\mathrm{ms}$, on trouve $L_1 = 0{,}1\,\mathrm{H}$.

13. On commence par calculer les énergies reçues par les guirlandes et fournies par la batterie sur une période T :
   - avec la bobine L_2, l'intensité dans la guirlande R_1 est quasi constante. Graphiquement, on lit $i_1 \approx 1{,}8\,\mathrm{A}$. On a donc

$$\mathcal{E}_1 = Ri_1^2 T$$

   - la guirlande R_2 n'est allumée que pendant $T/2$ où elle est parcourue par une intensité $i_2 \approx 1{,}4\,\mathrm{A}$. On a donc

$$\mathcal{E}_2 = Ri_2^2 \frac{T}{2}$$

   - l'intensité traversant la batterie vaut i_1 sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right[$ et $i_1 + i_2$ sur $\left[\frac{T}{2}, T\right[$. On a donc

$$\mathcal{E}_b = E(2i_1 + i_2)\frac{T}{2}.$$

Par ailleurs, l'énergie initialement stockée dans la batterie se déduit des informations visibles sur la photo. On a $\mathcal{E}_{\text{tot}} = EQ$, avec $E = 6\,\mathrm{V}$ et $Q = 12\,\mathrm{A\cdot h}$.
L'autonomie Δt de la batterie s'exprime selon

$$\boxed{\Delta t = \frac{\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathcal{E}_b} T = \frac{2Q}{2i_1 + i_2}.}$$

A.N. : $\Delta t \approx 4{,}8\,\mathrm{h}$.
Le rendement η correspond au rapport entre l'énergie reçue par les guirlandes et celle fournie par la batterie, soit :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_b} = \frac{R(2i_1^2 + i_2^2)}{E(2i_1 + i_2)}}.$$

A.N. : $\eta \approx 0{,}56$.

Annexe 1 – Évolution de l'intensité du courant parcourant la guirlande R_1