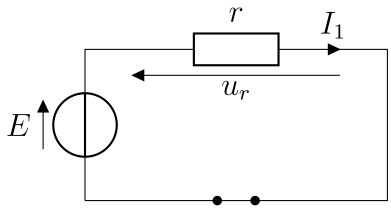
DM08 – Bougie d'allumage
Correction

Exercice 1 – Bougie d'allumage

1. En régime permanent, le circuit est équivalent à :



Par loi de Pouillet, on a immédiatement

$$\boxed{I_1 = \frac{E}{r}.}$$

A.N. : $I_1 = 2{,}0\,\mathrm{A}$.

2. En appliquant la loi des mailles, puis les lois de comportement des dipôles, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{L}i_1 = \frac{E}{L}.}$$

3. En régime permanent, l'équation devient

$$0 + \frac{r}{L}i_1 = \frac{E}{L}, \quad \text{soit} \quad \boxed{i_1 = \frac{E}{r}.}$$

On retrouve l'expression de l'intensité I_1 obtenue à la question 1.

4. En régime permanent, $i_1(t) = I_1 = \text{cste}$. On a donc

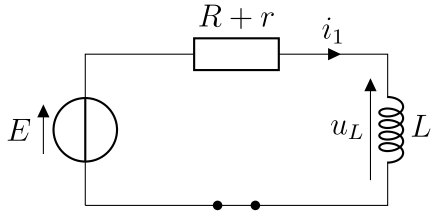
$$u_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Il ne peut pas y avoir d'étincelle en régime permanent car la tension aux bornes de la bougie est nulle.

5. Les deux résistances sont en série : elles sont équivalentes à une unique résistance $R + r$. On reconnait alors un circuit RL comportant une bobine d'inductance L et une résistance $R + r$, dont le temps caractéristique s'exprime

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}.}$$

6. Le raisonnement est identique à celui de la question 2 dans le circuit



On obtient

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R+r}{L} i_1 = \frac{E}{L}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{I_\infty}{\tau},} \quad \text{avec} \quad \boxed{I_\infty = \frac{E}{R+r}.}$$

7. On suppose le régime permanent atteint en $t = 0^-$, d'où $i_1(t=0^-) = I_1$. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue, donc

$$\boxed{i_1(t=0^+) = i_1(t=0^-) = I_1.}$$

8. La solution de l'équation homogène est de la forme $I_0 e^{-t/\tau}$ et la solution particulière I_∞ convient. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit

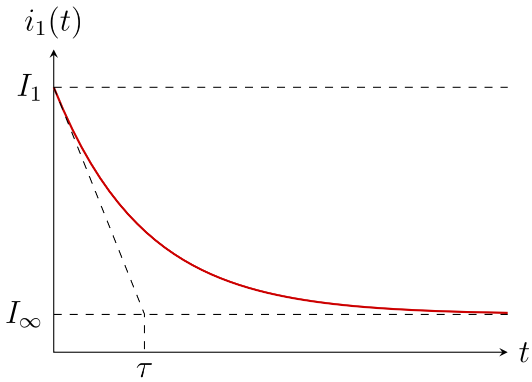
$$i_1(t) = I_0 e^{-t/\tau} + I_\infty.$$

La constante I_0 s'obtient avec la condition initiale :

$$i_1(t=0) \underset{\text{sol°}}{=} I_0 + I_\infty \underset{\text{CI}}{=} I_1, \quad \text{d'où} \quad I_0 = I_1 - I_\infty.$$

Finalement

$$\boxed{i_1(t) = (I_1 - I_\infty) e^{-t/\tau} + I_\infty.}$$



9. Le temps caractéristique du régime transitoire de $u_2(t)$ est le même que celui de $i_1(t)$ car

$$u_2(t) = -\frac{\alpha}{\tau}(I_1 - I_\infty) e^{-t/\tau}.$$

On utilise la méthode des 37 % :

- graphiquement, on lit $|u_2(0)| = 15\,\mathrm{kV}$;
- on calcule $0{,}37 \times |u_2(0)| = 5{,}55\,\mathrm{kV}$;

- on lit graphiquement τ tel que $|u_2(\tau)| = 0{,}37 \times |u_2(0)|$.

On obtient ainsi

$$\boxed{\tau \approx 2{,}0\,\mathrm{ms}.}$$

10. La date t_1 est telle que $|u_2(t_1)| = 10\,\mathrm{kV}$. Graphiquement, on lit

$$\boxed{t_1 \approx 0{,}8\,\mathrm{ms}.}$$

11. On approche la dérivée temporelle de $i_1(t)$ par le taux d'accroissement dans l'équation différentielle obtenue à la question 6, d'où, après calcul

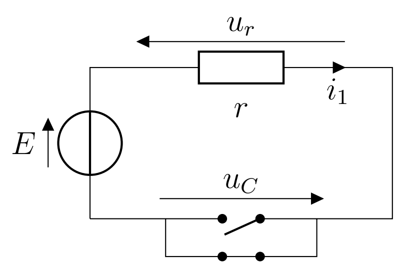
$$\boxed{i_{1,k+1} = i_{1,k} + \frac{\delta t}{\tau}(I_\infty - i_{1,k}).}$$

12. On retranscrit l'expression obtenue précédemment :

```
for k in range(N-1):          # calcul des valeurs i1(tk)
    i1[k+1] = i1[k] + (I_infty - i1[k]) * dt / tau
```

13. La solution numérique présente des **oscillations incompatibles avec un circuit d'ordre 1** : le **pas de temps δt est trop important** et doit être réduit pour obtenir un résultat conforme aux observation expérimentales. Avec `dt = 1e-4`, le calcul numérique donne déjà des résultats satisfaisants.

14. En $t = 0^-$, le régime permanent est atteint et le circuit est équivalent à



On voit que $u_C(t = 0^-)$. La tension aux borne du condensateur est continue, d'où

$$u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0.$$

Il n'y a pas de surtension, donc pas d'étincelle au niveau du rupteur lorsqu'il s'ouvre en présence du condensateur.

15. On applique la loi des mailles et les lois de comportement. Avec $q = Cu_C$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 Q_0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad Q_0 = CE.}$$

16. Avec le circuit de la question 14, on a montré que $u_C(t = 0^+) = 0$, d'où $q(t = 0^+) = Cu_C(t = 0^+) = 0$.

D'autre part, on remarque que ce circuit est identique à celui de la question 1, d'où $i_1(t = 0^-) = I_1$. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue, d'où $i_1(t = 0^+) = i_1(t = 0^-) = I_1$. Avec $i_1(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$, obtient $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = I_1$.

On retrouve donc bien :

$$\boxed{q(t = 0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = I_1.}$$

17. Une étincelle se forme aux bornes de la bougie dès que $|u_2(t)| > 10\,\text{kV}$. Sur la courbe, on remarque que cela arrive trois fois après l'ouverture du rupteur : **il se forme donc bien plusieurs étincelles aux bornes de la bougie** après l'ouverture du rupteur.

18. L'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ s'obtient simplement en dérivant celle sur la charge $q(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_2 = 0.$$

$u_2(t)$ et $q(t)$ vérifie donc deux équations d'oscillateurs amortis ayant les mêmes pulsation propre ω_0 et facteur de qualité Q. On peut donc estimer Q et ω_0 sur la courbe de $u_2(t)$. On compte le nombre d'oscillations pendant le régime transitoire pour estimer Q : on obtient $Q \approx 10$. Le facteur de qualité est suffisamment grand ($Q > 3$) pour considérer que la pseudo-pulsation ω et la pulsation propre sont confondues. On relève graphiquement la durée de dix pseudo-période T : $10T = 40\,\text{ms}$. Avec $\omega_0 \approx \omega = 2\pi/T$, on obtient $\omega_0 \approx 1{,}6 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Finalement :

$$\boxed{\omega_0 \approx 1{,}6 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q \approx 10.}$$

19. Avec $Q \approx 10 > 1/2$, le circuit est en régime pseudo-périodique. La solution de l'équation homogène est de la forme

$$q_h(t) = e^{-\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

et la solution particulière Q_0 convient. La solution générale s'écrit donc

$$q(t) = e^{-\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + Q_0.$$

Les conditions initiales donnent

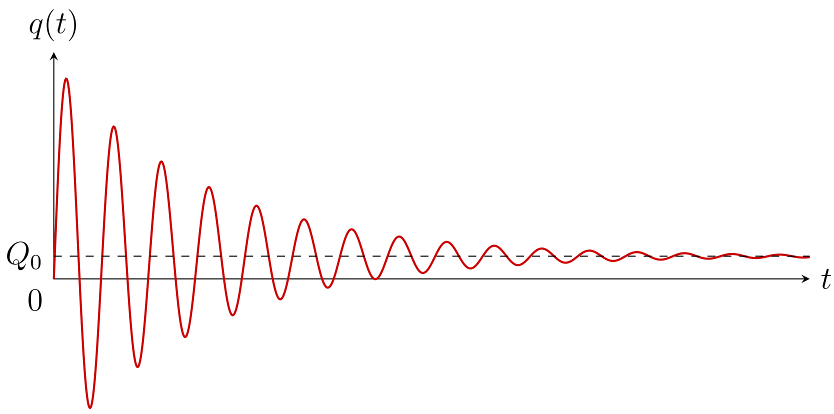
$$q(t=0) \underset{\text{sol}^\circ}{=} A + Q_0 \underset{\text{CI}}{=} 0, \quad \text{soit} \quad A = -Q_0,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t=0^+) \underset{\text{sol}^\circ}{=} -\mu A + B\omega \underset{\text{CI}}{=} I_1, \quad \text{soit} \quad B = \frac{I_1 - Q_0\mu}{\omega}.$$

Finalement,

$$\boxed{q(t) = e^{-\mu t}\left(-Q_0\cos\omega t + \frac{I_1 - Q_0\mu}{\omega}\sin\omega t\right) + Q_0.}$$



20. On a

$$\dot{x}(t) = \dot{q}(t) = y(t) \quad \text{et} \quad \dot{y}(t) = \ddot{q}(t) = \omega_0^2(Q_0 - q(t)) - \frac{\omega_0}{Q}\dot{q}(t) = \omega_0^2(Q_0 - x(t)) - \frac{\omega_0}{Q}y(t),$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = y\,; \\ \dot{y} = \omega_0^2(Q_0 - x) - \dfrac{\omega_0}{Q}y. \end{cases}}$$

21.

```python
def charge_primaire(V, t):
    x = V[0]
    y = V[1]
    dx = y
    dy = omega0**2 * (Q0 - x) - omega0/Q * y
    return [dx,dy]
```