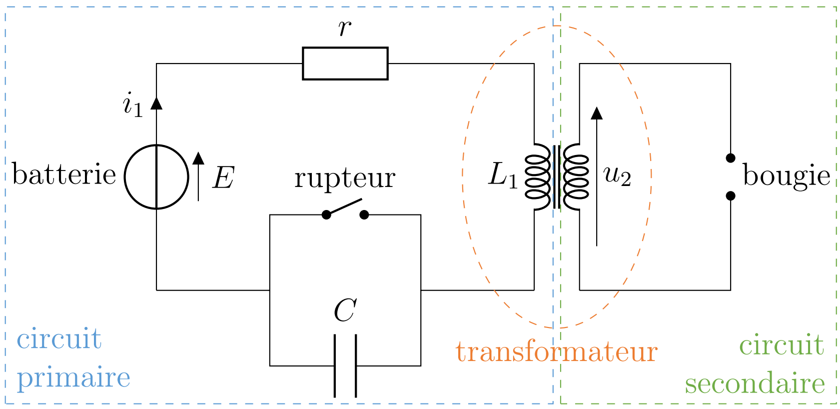
DM08 – Bougie d'allumage

Exercice 1 – Bougie d'allumage

Dans un moteur à essence, l'inflammation du mélange air-carburant est provoquée par une étincelle qui se produit entre les bornes d'une bougie d'allumage. Cette étincelle apparait seulement lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie d'allumage est supérieure à 10 kV. On peut modéliser le circuit d'allumage par le schéma représenté ci-dessous.



La batterie de force électromotrice $E = 12\,\mathrm{V}$ est considérée comme une source idéale de tension. La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance L_1 en série avec une résistance $r = 6{,}0\,\Omega$. Le rupteur est un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur.

Le rôle du transformateur est d'obtenir une tension de sortie u_2 aux bornes de la bougie très élevée. Cette tension est liée à l'intensité du courant dans le circuit primaire i_1 :

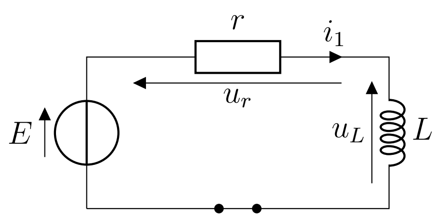
$$u_2 = \alpha \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

où α est une constante positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre l'exercice.

L'objectif de l'exercice est d'étudier les conditions de formation d'une étincelle au niveau de la bougie d'allumage.

Circuit primaire sans condensateur

On s'intéresse pour l'instant uniquement au circuit primaire, quand le rupteur est fermé et sans condensateur. On s'intéresse donc au circuit représenté ci-contre.



1. Exprimer, puis calculer l'intensité I_1 du courant dans le circuit primaire en régime permanent.

RCO

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_1(t)$.
3. Que devient cette équation en régime permanent ? Commenter.
4. Peut-il y avoir une étincelle au niveau de la bougie en régime permanent ? Justifier.

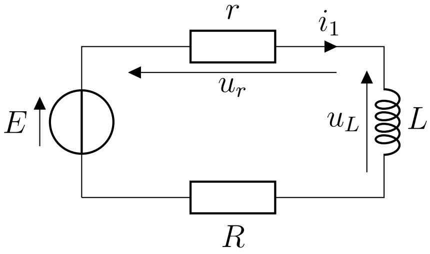
On ouvre le rupteur à l'instant $t = 0$. Une étincelle se produit à ses bornes : l'air devient conducteur et le rupteur se comporte comme un conducteur ohmique de résistance élevée R (plusieurs MΩ). Le circuit primaire est alors équivalent à celui représenté ci-dessous.

5. Donner l'expression du temps caractéristique τ associé à ce nouveau circuit.

6. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par le courant $i_1(t)$ pour $t > 0$. On l'écrira sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{I_\infty}{\tau},$$

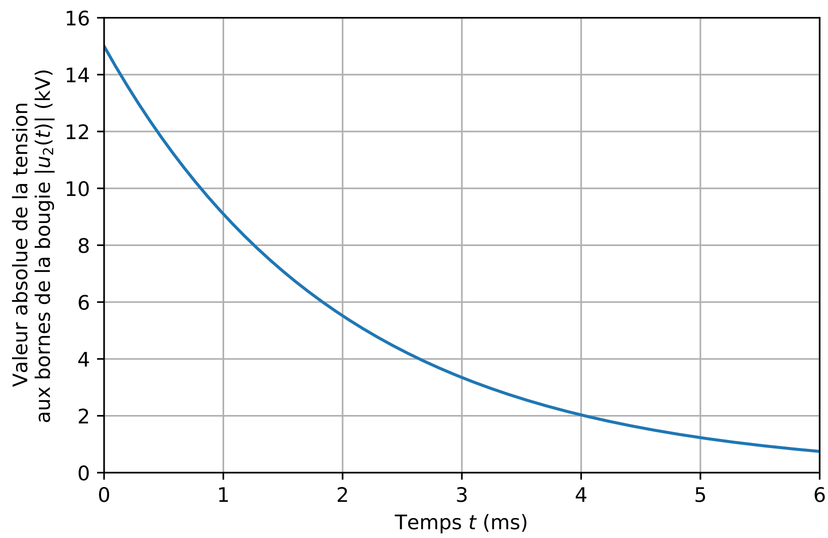
où I_∞ est une constante dont on donnera l'expression.



7. Déterminer la condition initiale permettant de résoudre l'équation différentielle.

RCO **8.** Donner l'expression de $i_1(t)$ pour $t > 0$ et représenter son allure.

9. L'allure de la tension $u_2(t)$ est représentée ci-dessous. Déterminer graphiquement la valeur du temps caractéristique τ. Expliquer succinctement la démarche.



10. À partir de quelle date t_1 peut on considérer qu'il n'y a plus d'étincelle au niveau de la bougie ?

On souhaite vérifier les résultats obtenus précédemment (Q. 8) à l'aide d'une résolution numérique avec la méthode d'Euler explicite. Le début du code est donné ci-dessous.

```
import numpy as np

dt = 3e-3                      # pas de temps en seconde
t  = np.arange(0,16e-3,dt)     # liste des instants tk
N  = len(t)                    # nombre de valeurs tk

tau   = 2e-3                   # temps caractéristique en s
I_infty = .1          # valeur de i1 en régime permanent (A, arbitraire)
```

```
9
10 i1= np.zeros(N)    # création d'un tableau de 0 de même longueur que t
11 i1[0] = 1                  # condition initiale (A, arbitraire)
12 for k in range(N-1):       # calcul des valeurs i1(tk)
13     # À compléter
```

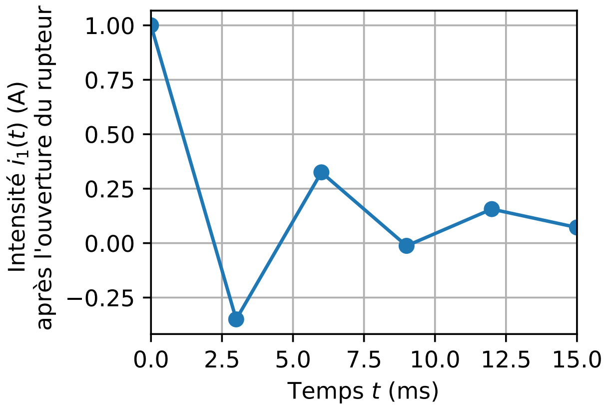
On note $t_k = k\delta t$ et $i_{1,k} = i_1(t_k)$, où k est un entier et δt est le pas de temps choisi pour la résolution numérique.

11. En remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{i_{1,k+1} - i_{1,k}}{\delta t},$$

exprimer $i_{1,k+1}$ en fonction de $i_{1,k}$, I_∞, τ et δt.

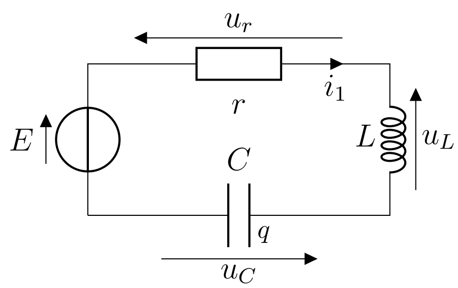
12. Écrire l'expression à taper à la ligne 13 du code ci-dessus pour calculer numériquement les valeurs `i1[k]` de i_1 aux instants t_k.



13. La résolution numérique donne la courbe représentée ci-dessus. Commenter. Que faut-il modifier ?

Circuit primaire avec condensateur

Pour empêcher la formation d'une étincelle aux bornes du rupteur au moment de son ouverture, un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$ est branché en dérivation aux bornes du rupteur. À l'instant $t = 0$, le rupteur s'ouvre : le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma représenté ci-contre.

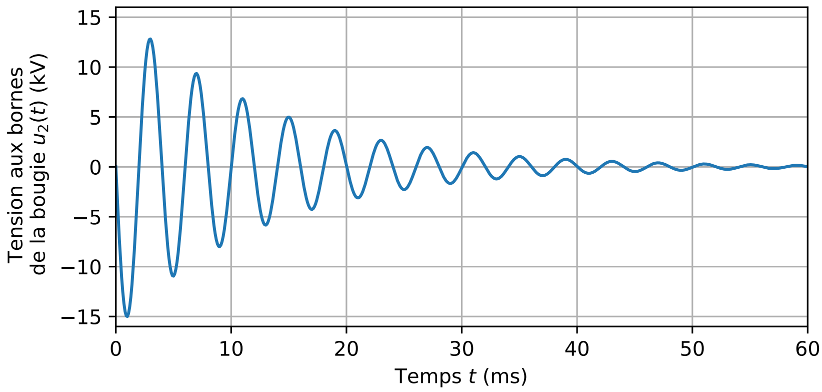


14. On suppose qu'avant d'être ouvert, le rupteur était fermé depuis un temps très long. Justifier que le condensateur empêche la formation d'une étincelle au niveau du rupteur.

RCO **15.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$. L'écrire sous forme canonique en faisant apparaitre la pulsation propre ω_0 du système, son facteur de qualité Q et la charge Q_0 du condensateur en régime permanent. Exprimer ω_0, Q et Q_0 en fonction de r, L, C et E.

16. Justifier qu'en $t = 0^+$, $q(0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = I_1$.

L'allure de la variation temporelle de la tension $u_2(t)$ réellement observée aux bornes de la bougie est représentée ci-dessous.



17. Expliquer, grâce à la courbe précédente, pourquoi en présence du condensateur, on observe un train d'étincelles aux bornes de la bougie.

18. Proposer une estimation du facteur de qualité Q. Déterminer graphiquement ω_0. On expliquera succinctement la démarche.

RCO **19.** Résoudre l'équation différentielle établie à la question 15 et donner l'expression de $q(t)$ pour $t > 0$. Représenter graphiquement l'allure de $q(t)$.

20. On souhaite résoudre numériquement l'équation différentielle établie à la question 15 afin de vérifier les résultats obtenus. L'écrire sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées vérifiées par $x(t) = q(t)$ et $y(t) = \dot{q}(t)$.

21. Écrire la fonction `charge_primaire(V,t)` associée à ce système, permettant une résolution numérique avec la fonction `odeint` de `scipy.integrate` dont la documentation est rappelée ci-dessous. On notera `omega0`, `Q` et `Q0` les variables associées à ω_0, Q et Q_0.

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t) :` intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F(V,t), \text{ où } V = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Paramètres :

`F` : fonction qui renvoie la dérivée de V en t ;

`V0` : conditions initiales sur V ;

`t` : liste des instants auxquels est calculé V.

Renvoie :

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs V, calculés aux instants de `t`.