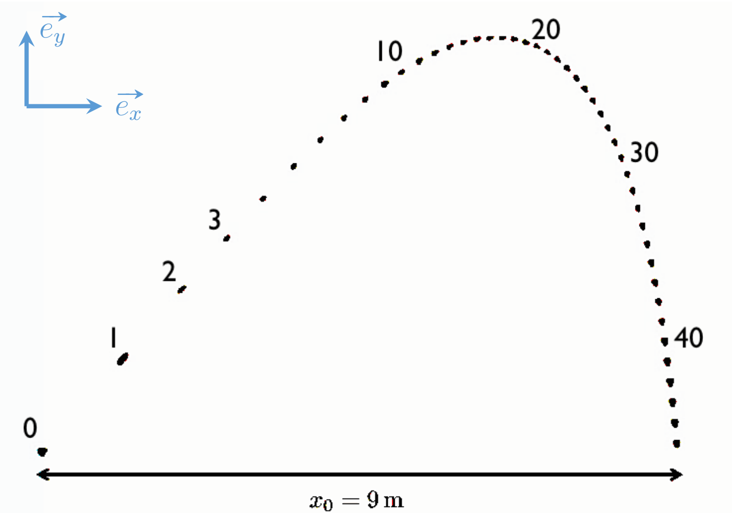
TD M1 – Cinématique du point matériel

★☆☆ Exercice 1 – Trajectoire d'un volant de badminton

L'image ci-dessous est la chronophotographie associée au mouvement d'un volant de badminton. Le volant va de la gauche vers la droite et les images sont obtenues à l'aide d'une caméra qui filme la scène à raison de 25 images par seconde.

1. Décrire le mouvement du volant avant la position 5, puis après la position 30.
2. Évaluer l'angle θ_0 entre le vecteur vitesse à la position 0 et l'horizontale.
3. Calculer la vitesse instantanée v_0 à la position 0 et la vitesse v_∞ à la fin du mouvement.
4. Représenter sur la chronophotographie le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_5$ à la position 5, en prenant $1\,\mathrm{cm} \leftrightarrow 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ comme échelle.



★☆☆ Exercice 2 – Étude d'une loi horaire

Soit un point mobile M dont la trajectoire dans un repère fixe orthonormé $(Oxyz)$ est donnée par les équations :

$$x(t) = 4t^2, \quad y(t) = 4(t - t^3/3) \quad \text{et} \quad z(t) = 3t + t^3.$$

1. Déterminer le vecteur vitesse et sa norme.
2. Déterminer le vecteur déplacement élémentaire.
3. Déterminer le vecteur accélération et sa norme.

★☆☆ Exercice 3 – Pour aller danser le jerk

Le vecteur d'à-coup $\vec{j}$ (ou jerk en anglais, qui signifie secousse ou saccade) est la dérivée du vecteur accélération.

1. Retrouver l'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires.
2. En imitant le calcul du cours, calculer les composantes de $\vec{j}$ en coordonnées polaires.
3. Dans le cas d'un point astreint à se déplacer sur un cercle, que vaut $\vec{j}$? Et si en plus, sa vitesse angulaire est constante ?

★☆☆ Exercice 4 – Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre et sa période de révolution est égale à la période T de rotation de la Terre sur elle-même. Son accélération est donnée par $a = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $R = 6400\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre, r le rayon de l'orbite du satellite et $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur au niveau du sol.

1. Faire un schéma et représenter la base de Frenet.
2. Exprimer la vitesse du satellite en fonction de r et T.
3. Déterminer l'altitude h du satellite en orbite géostationnaire.
4. Calculer la norme de sa vitesse.

★☆☆ Exercice 5 – Mouvement circulaire

Une particule se déplace sur un cercle de rayon R, à la vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante. À la date $t = 0$, elle ralentit avec une accélération angulaire constante égale à $-\alpha_0$ ($\alpha_0 > 0$).

1. Au bout de combien de temps la particule s'arrête-t-elle ?
2. Quelle distance a-t-elle alors parcouru ?

★★☆ Exercice 6 – Mouvement elliptique

Un point matériel M se déplace dans le sens trigonométrique sur une ellipse d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation horaire du mouvement de M peut s'écrire $x(t) = \alpha\cos(\omega t+\varphi)$ et $y(t) = \beta\sin(\omega t+\psi)$, où ω est une constante. En $t = 0$, les coordonnées du point M sont $(a, 0)$.

1. Déterminer α, β, φ et ψ. Représenter la trajectoire, dans le cas où $a > b$.
2. Déterminer les composantes de la vitesse et celles de l'accélération du point M.
3. Que dire des vecteurs position et accélération à chaque instant ?
4. Pour trois positions de M sur sa trajectoire, représenter les vecteurs position, vitesse et accélération.

★★☆ Exercice 7 – Spirale logarithmique

On donne les équations horaires du mouvement d'un point matériel M :

$$r(t) = be^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega t.$$

1. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération.
2. Déduire la norme de ces vecteurs.
3. Montrer que l'angle formé entre le vecteur position et le vecteur vitesse est indépendant de la position occupée sur la trajectoire.
4. Quelle est la distance totale L parcourue par le point au bout d'un temps très long ?

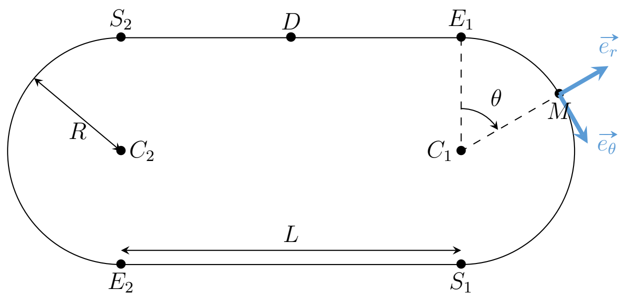
★★☆ Exercice 8 – Course de voitures radio-télécommandées

Anatole et Barnabé comparent les performances de leurs voitures télécommandées. La voiture d'Anatole a une accélération de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ tandis que celle de Barnabé accélère à $3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, mais la voiture d'Anatole peut atteindre $12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ alors que celle de Barnabé ne dépasse pas $10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1. Déterminer le vainqueur d'une course longue de $15\,\mathrm{m}$.
2. Le gagnant, accorde une revanche à son adversaire et lui laisse choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr, cette fois, de l'emporter ?

★★☆ Exercice 9 – Parcours d'un cycliste sur un vélodrome

On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point matériel M,qui s'entraîne sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles reliées par deux lignes droites (figure ci-dessous). Le cycliste part de D avec une vitesse nulle.



Données : $L = 62\,\mathrm{m}$ *et* $R = 20\,\mathrm{m}$.

1. Il exerce un effort constant ce qui se traduit par une accélération constante a_1 jusqu'à l'entrée E_1 du premier virage. Calculer le temps t_{E_1} de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E_1} en fonction de a_1 et L.
2. Dans le premier virage, le cycliste a une accélération tangentielle selon $\vec{e_\theta}$ constante et de norme a_1. Déterminer le temps t_{S_1} de passage en S_1 ainsi que la vitesse v_{S_1} en fonction de a_1, L et R.
3. De même, en considérant l'accélération tangentielle constante tout au long du premier tour et égale à a_1, déterminer les temps t_{E_2}, t_{S_2} et t_D (après un tour), ainsi que les vitesses correspondantes.
4. La course s'effectue sur quatre tours ($1\,\mathrm{km}$) mais on ne s'intéresse qu'au premier effectué en $t_1 = 18{,}155\,\mathrm{s}$ (temps du britannique Chris Hoy aux Championnats du monde de 2007). Déterminer la valeur de l'accélération a_1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est d'environ $60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité ?

★★☆ Exercice 10 – Ballon sonde

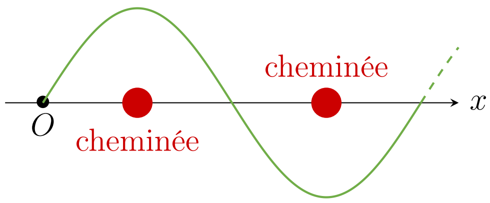
On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée selon l'axe (Ox) et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$, où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On exprimera $x(t)$ en fonction de v_0 et τ.

3. En déduire l'équation de la trajectoire $z(x)$ pour le ballon sonde.
4. Représenter cette trajectoire et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.
5. Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

★★☆ Exercice 11 – May the force be with you

Dans un épisode de Star Wars, on peut assister à une course poursuite de speeders entre les cheminées d'une usine. On suppose que le véhicule slalome entre les cheminées alignées selon l'axe (Ox) en suivant une trajectoire sinusoïdale. Elle sont espacées d'une distance $L = 200\,\text{m}$.



https://youtu.be/fjojcgNE34o

1. Le véhicule conserve une vitesse v_0 constante selon (Ox) et met un temps $\Delta t = 12\,\text{s}$ pour revenir sur l'axe après la sixième cheminée. Exprimer, puis calculer la vitesse v_0.
2. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération du véhicule reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Commenter.

★★★ Exercice 12 – Parking hélicoïdal

On considère un parking en colimaçon (rampe hélicoïdale). Un automobiliste la remonte avec une vitesse constante $v_0 = 10\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Déterminer la norme de son accélération.

Données : rayon de l'hélice décrite par l'automobiliste $R = 20\,\text{m}$ *; pas de l'hélice (hauteur entre deux niveaux du parking)* $h = 3\,\text{m}$.

★★★ Exercice 13 – Cinématique d'un satellite

Le centre de la Terre est repéré par l'origine d'un repère O. On considère un satellite M évoluant sous l'effet de l'attraction gravitationnelle. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ).

On verra plus tard que la trajectoire de ce satellite est une ellipse de foyer O. La trajectoire est donnée par l'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

où p et $e \in]0,1[$ sont respectivement appelées paramètre et excentricité de la trajectoire. On note a le demi-grand axe de l'ellipse.

1. On appelle P le point où le satellite est le plus proche de la Terre (périgée), A le point où il en est le plus loin (apogée). Donner p et e en fonction de r_P et r_A, puis en fonction de r_P et a. Faire l'application numérique pour $a = 16\,000\,\text{km}$ et $r_P = 8000\,\text{km}$.
2. L'accélération de ce type de mouvement est purement radiale. Montrer alors que la quantité $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$ est conservée au cours du temps.

3. Montrer que les vitesses au périgée et à l'apogée sont orthoradiales.

4. Donner $\mathcal{C}$ en fonction de r_P et v_P. Faire l'application numérique pour $v_P = 8{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

5. Calculer v_A et la comparer à v_P. Commenter.

Coups de pouce

Ex. 1 3. Quel intervalle de temps sépare deux positions successives ?
Ex. 3 2. Penser à vérifier l'homogénéité du résultat obtenu !
Ex. 4 2. Quelle distance parcourt le satellite pendant T ? 3. Quelle est la norme de l'accélération dans le repère de Frenet ?
Ex. 5 1. Que peut-on dire de la vitesse angulaire lorsque la particule s'arrête ? 2. $L = \int_0^L \mathrm{d}\ell = \int_0^\infty v\mathrm{d}t$.
Ex. 6 1. Quelle est la valeur maximale de $x(t)$? Qu'en déduire sur α ?
Ex. 7 1. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont connus en coordonnées polaires, il n'y a plus qu'à calculer $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. 3. Exprimer $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}$ de deux manières différentes. 4. $L = \int_0^L \mathrm{d}\ell = \int_0^\infty v\mathrm{d}t$.
Ex. 8 1. Le mouvement comporte deux phases. Lesquelles ? Déterminer la durée de chaque phase.
Ex. 11 2. Déterminer l'équation de la trajectoire et en déduire les équations horaires du mouvement.
Ex. 12 Quel système de coordonnées est le plus adapté ? Quelle est la distance parcourue après un tour complet ? Déterminer les équations horaires du mouvement.
Ex. 13 1. Par définition, $2a = r_A + r_P$. 2. Que peut-on dire de la composante orthoradiale ? Que peut-on dire de $\frac{\mathrm{d}\mathcal{C}}{\mathrm{d}t}$?

✓ Éléments de correction

Ex. 1 2. $\theta_0 \approx 49°$; 3. $v_0 \approx 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_\infty \approx 6{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 4. $v_5 \approx 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Ex. 2 1. $\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} = 8t\overrightarrow{e_x} + 4(1-t^2)\overrightarrow{e_y} + 3(1+t^2)\overrightarrow{e_z}$, $v = 5 + 5t^2$; 2. $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$; 3. $\vec{a} = 8\overrightarrow{e_x} - 8t\overrightarrow{e_y} + 6t\overrightarrow{e_z}$, $a = \sqrt{64 + 100t^2}$.
Ex. 3 2. $\vec{j} = (\dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\overrightarrow{e_r} + (3\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^3 + 3\dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$; 3. $\vec{j} = -3R\dot{\theta}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_r} + R(\dddot{\theta} - \dot{\theta}^3)\overrightarrow{e_\theta}$, $\vec{j} = -R\omega^3\overrightarrow{e_\theta}$.
Ex. 4 2. $v = 2\pi r/T$; 3. $h = \left(\frac{g_0 R^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \approx 36 \times 10^3\,\mathrm{km}$; 4. $v = \left(\frac{2\pi g_0 R^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
Ex. 5 1. $\Delta t = \omega_0/\alpha_0$; 2. $L = \frac{R\omega_0^2}{2\alpha_0}$.
Ex. 6 1. $a\cos\omega t$, $y(t) = b\sin\omega t$; 2. $\vec{v} = -a\omega\sin(\omega t)\overrightarrow{e_x} + b\omega\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y}$, $\vec{a} = -a\omega^2\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + -b\omega^2\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$; 3. $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$;
Ex. 7 1. $\vec{v}(t) = be^{-t/\tau}\left(\omega\overrightarrow{e_\theta} - \frac{1}{\tau}\overrightarrow{e_r}\right)$, $\vec{a}(t) = be^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\overrightarrow{e_r} - \frac{2\omega}{\tau}\overrightarrow{e_\theta}\right)$; 2. $v = \frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$, $a = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}\sqrt{1 + 2\omega^2\tau^2 + \omega^4\tau^4}$; 3. $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$; 4. $L = b\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$.
Ex. 8 1. $\Delta t_X = \frac{v_X}{2a_X} + \frac{L}{v_X}$, $\Delta t_A \approx 5{,}3\,\mathrm{s}$, $\Delta t_B \approx 5{,}9\,\mathrm{s}$; 2. $L' = \frac{1}{2}\left(\frac{v_B}{a_B} - \frac{v_A}{a_A}\right)\frac{v_A v_B}{v_B - v_A} = 6{,}2\,\mathrm{m}$.
Ex. 9 1. $t_{E_1} = \sqrt{L/a_1}$, $v_{E_1} = \sqrt{La_1}$; 2. $t_{S_1} = \sqrt{(L+2\pi R)/a_1}$, $v_{S_1} = \sqrt{(L+2\pi R)a_1}$; 3. $t_D = 2\sqrt{(L+\pi R)/a_1}$, $v_D = 2\sqrt{(L+\pi R)a_1}$; 4. $a_1 = 4(L+\pi R)/t_1^2 = 1{,}51\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $v_1 = 99\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
Ex. 10 1. $z(t) = v_0 t$; 2. $x(t) = \frac{v_0}{2\tau}t^2$; 3. $z(x) = \sqrt{2v_0\tau x}$; 5. $\vec{a}(t) = \frac{v_0}{\tau}\overrightarrow{e_x}$.
Ex. 11 1. $v_0 = \frac{6L}{\Delta t} = 360\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$; 2. $Y_0 < \frac{10gL^2}{\pi^2 v_0^2} = 40\,\mathrm{m}$.
Ex. 12 $\vec{a} = -\frac{4\pi^2 R v_0^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}\overrightarrow{e_r}$, $a \approx 0{,}39\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
Ex. 13 1. $e = 1 - \frac{r_P}{a} = 0{,}5$, $p = r_P(1+e) = 12\,000\,\mathrm{km}$; 4. $\mathcal{C} = r_P v_P \approx 6{,}9 \times 10^{10}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$; 5. $v_A = v_P r_P/r_A = \frac{r_P v_P}{2a - r_P} = 2{,}9 \times 10^3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} < v_P$.

Exercice 14 – Résolution de problème

Le Rafale est un avion de chasse qui peut se déplacer jusqu'à Mach 1,6. Le tableau ci-dessous indique les limites d'accélération maximale supportable par un pilote entrainé et équipé, en fonction de la durée d'exposition.

Temps	0,6 s	1,8 s	6 s	18 s	1 min	3 min	10 min	30 min
Accélération (g)	18	14	11	9	7	6	4,5	3,5

Déterminer le rayon de courbure R minimal de la trajectoire que peut supporter un pilote à bord d'un tel avion allant à sa vitesse maximale.

python™ Exercice 15 – Lancer de poids

On souhaite explorer numériquement la situation décrite dans l'application 5 du cours. On note $v_x(t)$ et $v_z(t)$ les composantes de la vitesse de M selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Les autres notations sont identiques à celles choisies dans l'application.

1. Exprimer $\dot{x}$, $\dot{z}$, $\dot{v_x}$ et $\dot{v_z}$ en fonction de v_x, v_z et g.
2. Écrire deux fonctions `mouvement_x` et `mouvement_z` qui permettront d'intégrer numériquement les équations différentielles du mouvement à l'aide de la fonction `odeint` de `scipy.integrate`.
3. Intégrer numériquement ces équations et représenter graphiquement la trajectoire du point M.
4. À l'aide de la simulation, déterminer la valeur de l'angle α permettant, pour une vitesse initiale donnée de lancer le projectile le plus loin.
5. À l'aide de la simulation, déterminer la vitesse initiale v_0 du poids lors du lancer du record du monde.