TD E3 – Circuits du deuxième ordre
Correction

Exercice 1 – Résolution d'équation différentielles

1. L'équation différentielle canonique associée à un OH s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0.}$$

2. **2.a.** L'équation a un second membre nul : la solution générale de l'équation homogène est la solution générale, soit

$$x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t),$$

où A et B sont des constantes.
Avec les C.I., on a

$$x(t=0)\underset{\text{sol°}}{=}A\underset{\text{CI}}{=}x_0$$

et

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega_0\sin(\omega_0t)+B\omega_0\cos(\omega_0t),\quad\text{soit}\quad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0)\underset{\text{sol°}}{=}B\omega_0\underset{\text{CI}}{=}0.$$

On a donc finalement

$$\boxed{x(t)=x_0\cos(\omega_0t).}$$

2.b. En procédant de la même manière, on trouve

$$\boxed{x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t).}$$

2.c. De même

$$\boxed{x(t)=x_0\cos(\omega_0t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t).}$$

3. Cette fois, l'équation différentielle possède un second membre non nul :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=\omega_0^2X_0.}$$

La solution générale de l'équation homogène est la même que précédemment. La solution particulière X_0 convient. La solution générale est

$$x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)+X_0,$$

où A et B sont des constantes.
Avec les C.I. on obtient les solutions suivantes.

3.a.

$$\boxed{x(t) = (x_0 - X_0)\cos(\omega_0 t) + X_0.}$$

3.b.

$$\boxed{x(t) = -X_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + X_0.}$$

3.c.

$$\boxed{x(t) = (x_0 - X_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + X_0.}$$

Exercice 2 – Oscillations et facteur de qualité

1. On a

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}, \quad [\tau] = \mathrm{T}}$$

et

$$\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad [\Omega] = \mathrm{T}^{-1}.}$$

2. Dans le cas où $Q \gg 1$, on a

$$\frac{1}{4Q^2} \ll 1, \quad \text{d'où} \quad \Omega \approx \omega_0, \quad \text{soit} \quad \boxed{T \approx T_0.}$$

La pseudo-période est très proche de la période propre.

3. On cherche la durée $T_{5\,\%}$ telle que $u_C(T_{5\,\%}) = 0{,}05 u_C(0)$, ce qui revient à $e^{-T_{5\,\%}/\tau} = 0{,}05$. On obtient

$$\boxed{T_{5\,\%} = \tau \ln 20 = \frac{2Q}{\omega_0}\ln 20.}$$

4. Le nombre N d'oscillation s'obtient en calculant le nombre de pseudo-périodes visibles pendant $T_{5\,\%}$, soit $N = T_{5\,\%}/T$. Avec $T \approx T_0$ car le facteur de qualité est élevé, on a

$$\boxed{N \approx Q\frac{\ln 20}{\pi} \approx Q}$$

car $\ln 20 \approx 3 \approx \pi$.
Le nombre d'oscillations visibles pendant le régime transitoire est de l'ordre du facteur de qualité. Cette propriété du régime transitoire d'un oscillateur amorti permet d'estimer expérimentalement le facteur de qualité.

Exercice 3 – Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

1.
- Le signal $s_1(t)$ est déjà écrit sous la forme, d'où, par identification et avec $T = 2\pi/\omega$ et $\omega = 2\pi f$,

$$\boxed{A = 15, \quad T = 0{,}02\,\text{s}, \quad f = 50\,\text{Hz} \quad \text{et} \quad \varphi = 0{,}5\,\text{rad.}}$$

- On se ramène à la forme canonique :

$$s_2(t) = 5\sin\left(7{,}854 \times 10^6 t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\left(7{,}854 \times 10^6 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Par identification, on obtient

$$\boxed{A = 5, \quad T = 0{,}8\,\mu\text{s}, \quad f = 1{,}25\,\text{MHz} \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.}$$

- De même que précédemment pour $s_3(t)$:

$$\boxed{A = 2, \quad T = 16{,}7\,\text{ms}, \quad f = 60\,\text{Hz} \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}.}$$

- On suit la recommandation de l'énoncé et on met $\sqrt{15^2+5^2}$ en facteur :

$$s_4(t) = \sqrt{15^2+5^2}\left(\frac{15}{\sqrt{15^2+5^2}}\cos(200\pi t) - \frac{5}{\sqrt{15^2+5^2}}\sin(200\pi t)\right).$$

On reconnait une forme $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$, d'où

$$s_4(t) = \sqrt{15^2+5^2}\cos(200\pi t + \varphi), \quad \text{avec} \quad \tan\varphi = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Finalement :

$$\boxed{A = \sqrt{15^2+5^2}, \quad T = 1\,\text{ms}, \quad f = 1\,\text{kHz} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan\frac{1}{3}.}$$

2. On cherche la phase initiale φ telle que

$$s\left(\frac{T}{4}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} + \varphi\right) = \frac{A}{2}$$

et

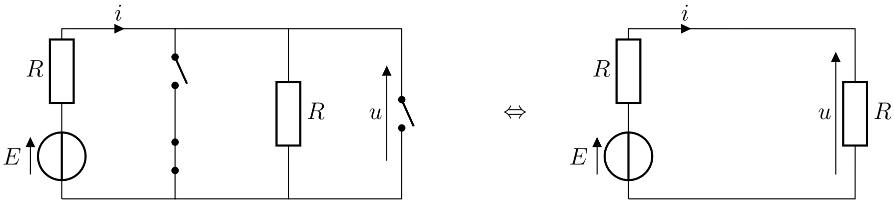
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T}{4}\right) = -A\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} + \varphi\right) > 0.$$

La première condition équivaut à $\cos(\pi/2 + \varphi) = 1/2$, soit $\varphi = -5\pi/6$ ou $\varphi = -\pi/6$. La deuxième condition permet d'exclure la deuxième solution, d'où finalement

$$\boxed{\varphi = -\frac{5\pi}{4}.}$$

Exercice 4 – Connexion d'une bobine à un circuit RC parallèle

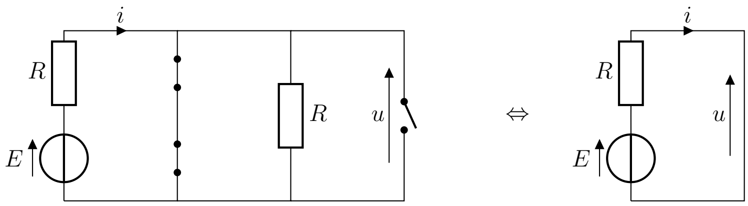
1. En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à celui représenté ci-dessous.



On reconnait un pont diviseur de tension entre deux résistances égales, d'où $u(t = 0^-) = E/2$. La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où

$$\boxed{u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = \frac{E}{2}.}$$

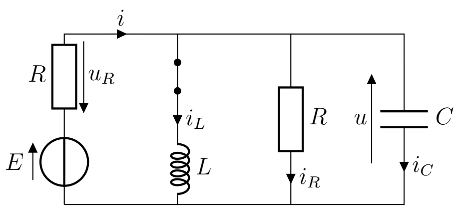
2. En régime permanent, c'est-à-dire quand $t \to \infty$, le circuit se ramène à celui représenté ci-dessous.



Le condensateur est court-circuité par la bobine en régime permanent, d'où

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.}$$

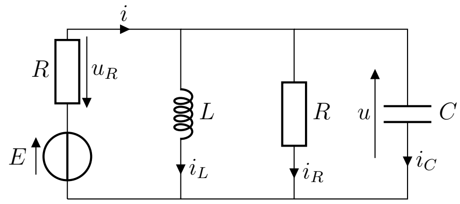
3. On reprend le circuit en $t = 0^-$: l'interrupteur est ouvert, l'intensité i_L du courant qui traverse la bobine est nulle. Celle-ci est continue, donc elle reste nulle en $t = 0^+$.
En $t = 0^+$, le circuit devient :



On sait que $u(t = 0^+) = E/2$, d'où d'après la loi d'Ohm pour la résistance de droite, $i_R = \frac{E}{2R}$. Par la loi des mailles, la tension aux bornes de la résistance de gauche vaut $u_R(t = 0^+) = E/2$, d'où d'après la loi d'Ohm, $i(t = 0^+) = \frac{E}{2R}$.
Toujours en $t = 0^+$, la loi des nœuds s'écrit $i(t = 0^+) = i_R(t = 0^+) + i_L(t = 0^+) + i_C(t = 0^+)$, soit $i_C(t = 0^+) = 0$. Avec la loi de comportement du condensateur, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0.}$$

4. Pour $t > 0$, le circuit est le suivant.



La loi des mailles s'écrit $E = Ri + u$ et avec la loi des nœuds, on a $E = R(i_R + i_C + i_L) + u$. Avec les lois de comportement, on obtient

$$E = R\left(\frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i_L\right) + u = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u + Ri_L.$$

On dérive pour utiliser la loi de comportement de la bobine

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}u.$$

La forme canonique s'obtient en divisant par LC, soit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.}$$

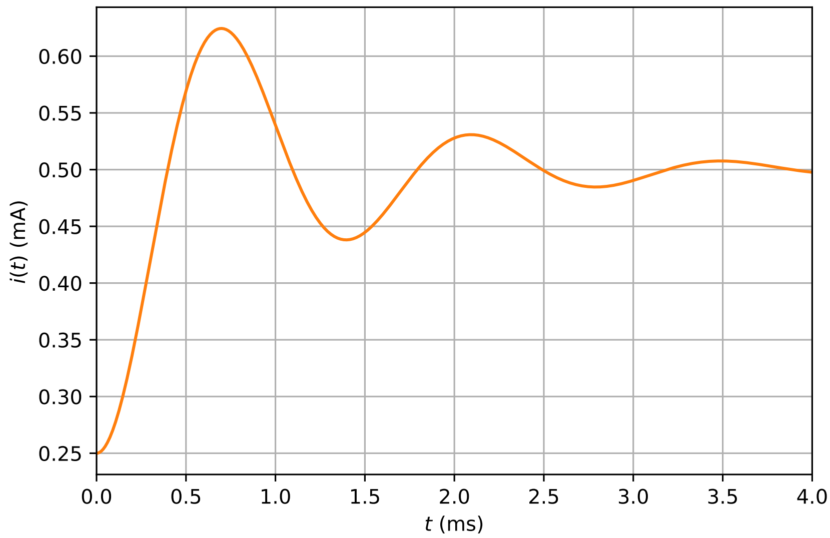
5. Pour observer un régime pseudo-périodique, on doit avoir $Q > 1/2$, soit

$$\boxed{R > \sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

6. On procède par élimination :

- la courbe 4 ne convient pas car elle ne vérifie pas le comportement asymptotique $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$: aux temps long la courbe tend verd E ;
- la courbe 3 ne vérifie pas la condition initiale $u(t = 0^+) = E/2$: elle vaut E en $t = 0$;
- la courbe 1 ne vérifie pas l'autre condition initiale $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$ car la tangente à la courbe en $t = 0$ n'est pas horizontale ;
- **la courbe 2 convient** : elle respecte les C.I. et le comportement asymptotique déterminés précédemment.

7. Sans calcul, on ne peut qu'utiliser les conditions $i(t = 0^+) = \frac{E}{2R}$, $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}$ et le fait que $i(t)$ doit présenter le même nombre d'oscillations que $u(t)$.



Pour être plus précis, on peut remarquer que $i(t) = (E - u(t))/R$.

8. Le régime transitoire présente quelques oscillations (~ 3), ce qui permet d'estimer le facteur de qualité : $Q \approx 3$. On a donc $\omega_0 \approx \Omega$, où Ω est la pseudo-pulsation. Par lecture graphique, la pseudo-période vaut $T \approx 1{,}4\,\mathrm{ms}$. Or

$$L \approx \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}.$$

A.N. : $L \approx 0{,}49\,\mathrm{H}$.
La valeur prise pour tracer la courbe est $0{,}47\,\mathrm{mH}$.

9. Le second membre est nul, la solution générale est de la forme

$$u(t) = e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)), \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

et où A et B sont tels que

$$u(t=0) \underset{\text{sol°}}{=} A \underset{\text{CI}}{=} \frac{E}{2}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{-\mu t}\left((-A\mu + B\Omega)\cos(\Omega t) - (B\mu + A\Omega)\sin(\Omega t)\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0) \underset{\text{sol°}}{=} -A\mu + B\Omega \underset{\text{CI}}{=} 0.$$

Finalement,

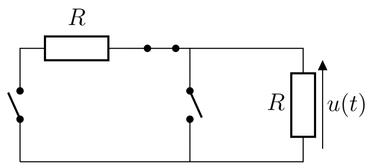
$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}e^{-\mu t}(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

Exercice 5 – Pont de Wien en régime transitoire

1. En $t = 0^-$, le condensateur C est déchargé, d'où $u(t = 0^-) = 0$. La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où

$$\boxed{u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0.}$$

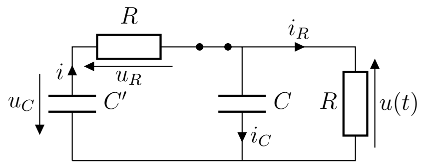
Quand $t \to \infty$, le circuit devient :



L'intensité du courant dans le circuit est nulle, soit par loi d'Ohm dans la résistance de droite

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.}$$

2. Pour $t > 0$, le circuit devient :



On dérive la loi des mailles $u_C + u_R + u = 0$ pour faire apparaitre la loi de comportement du condensateur C' :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{i}{C} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Avec la loi des nœuds $i = i_R + i_C$, on obtient

$$\frac{i_R}{C} + \frac{i_C}{C} + R\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

d'où en utilisant les lois de comportement de la résistance et du condensateur C

$$\frac{u}{RC} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.$$

En divisant par RC, on obtient le résultat attendu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau^2} = 0, \quad \text{avec} \quad \tau = RC.}$$

En écrivant l'équation sous la forme canonique, on obtient la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et le facteur de qualité

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}.}$$

3. On a $u(t=0^+)=0$, d'où $i_R(t=0^+)=0$ par loi d'Ohm : la loi des nœuds donne $i(t=0^+)=i_C(t=0^+)$. Par ailleurs, la tension aux bornes du condensateur est continue donc $u_C(t=0^+)=-U_0$. En $t=0^+$, la loi des mailles s'écrit donc $-U_0+Ri(t=0^+)=0$, d'où $i_C(t=0^+)=i(t=0^+)=U_0/R$. Avec la loi de comportement du condensateur C, on en déduit finalement

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+)=\frac{U_0}{\tau}.$$

On résout donc, pour $t>0$, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{3}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{\tau^2}=0\,;\\ u(t=0^+)=0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+)=\dfrac{U_0}{\tau}.\end{cases}$$

Avec $Q=1/3<1/2$, le régime transitoire est apériodique. Les racines du polynôme caractéristiques $r^2+3r/\tau+1/\tau^2$ sont

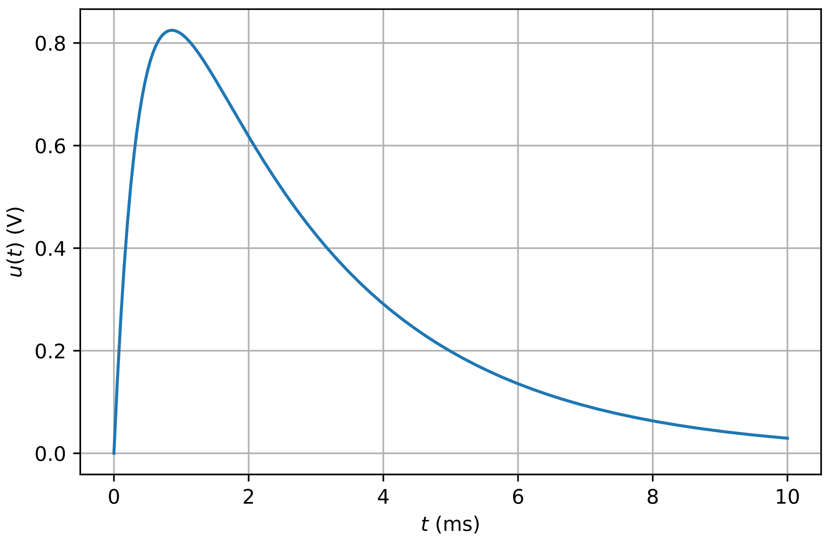
$$r_\pm=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2\tau}.$$

La solution générale est de la forme

$$u(t)=Ae^{r^+t}+Be^{r^-t}.$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient finalement

$$\boxed{u(t)=\frac{U_0}{\sqrt{5}}\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)\left(\exp\left(\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}\right)-\exp\left(-\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}\right)\right)=\frac{2U_0}{\sqrt{5}}\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}\right).}$$



4. $u(t)$ tend vers 0 en $t=0$ et en $t\to\infty$, elle est positive donc elle passe par un maximum. On cherche l'instant t_m qui annule la dérivée de u, avec

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{\sqrt{5}}\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t\right)-\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t\right)\right).$$

L'instant t_m est tel que

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t_m\right)=\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t_m\right),$$

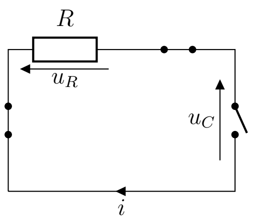
soit

$$\boxed{t_m=\frac{\tau}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right).}$$

A.N. : $t_m \approx 0{,}86\,\mathrm{ms}$, résultat cohérent avec l'allure de la courbe tracée précédemment.

Exercice 6 – Régime pseudo-périodique

1. En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à :



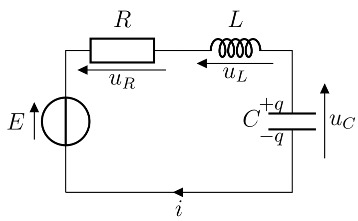
Le circuit est ouvert donc l'intensité $i(t = 0^-)$ du courant est nulle, d'où par définition

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t=0^-)=i(t=0^-)=0.}$$

On a $u_R(t = 0^-) = 0$ par loi d'Ohm et $u_R(t = 0^-) = -u_C(t = 0^-)$ par loi des mailles. De plus, la charge du condensateur vaut $q = Cu_C$, d'où

$$\boxed{q(t=0^-)=Cu_C(t=0^-)=0.}$$

2. Pour $t > 0$, le circuit devient



On a $E = u_R + u_L + u_C$ par loi des mailles, soit, avec les lois de comportement

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C.$$

Avec $u_C = q/C$ et $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, on obtient

$$E = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C},$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t}+2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q=\frac{E}{L},\quad \text{avec}\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad \text{et}\quad \gamma=\frac{R}{2L}.}$$

3. La tension $u_C = q/C$ aux bornes du condensateur est continue donc q l'est aussi. L'intensité $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ du courant qui traverse la bobine est continue donc la dérivée première de q l'est aussi. On a donc

$$\boxed{q(t=0^+) = q(t=0^-) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t=0^-) = 0.}$$

4. Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle est $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2$, de discriminant $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$. Pour observer un régime pseudo-périodique, on veut $\Delta < 0$, soit

$$\boxed{\gamma < \omega_0.}$$

5. Les racines du polynôme caractéristique sont complexes :

$$r_\pm = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

La solution de l'équation différentielle homogène s'écrit donc

$$q_h(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

On cherche une solution particulière constante, $u_p(t) = CE$, convient. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc

$$q(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) + CE.$$

Avec les conditions initiales, on obtient $A = -CE$ et $B = -\gamma CE/\omega$. Finalement,

$$u(t) = e^{-\gamma t}\left(-CE\cos(\omega t) - \frac{\gamma CE}{\omega}\sin(\omega t)\right) + CE.$$

On retrouve la forme donnée dans l'énoncé, avec

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad A = -CE, \quad B = -\frac{\gamma CE}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \text{et} \quad D = CE.}$$

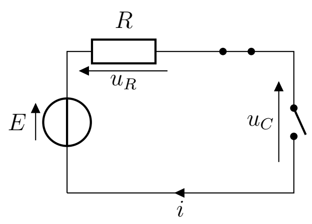
6. On a donc

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left(-CE\cos(\omega t) - \frac{\gamma CE}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\sin(\omega t)\right) + CE,$$

d'où

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{CE\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t}\sin(\omega t).}$$

7. En régime permanent, le circuit devient



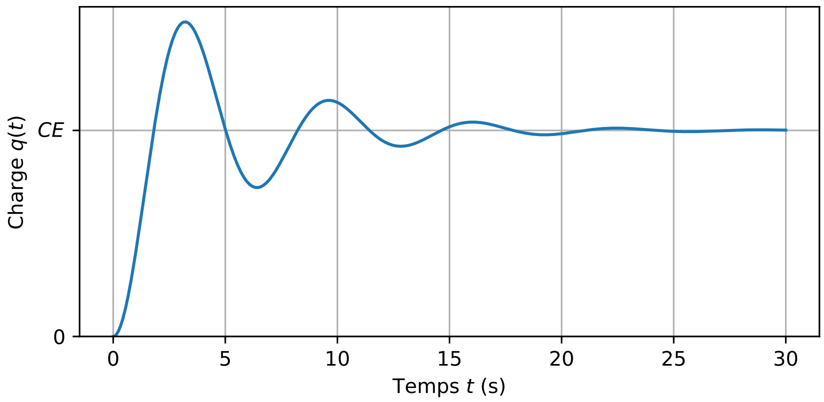
Le circuit est ouvert donc

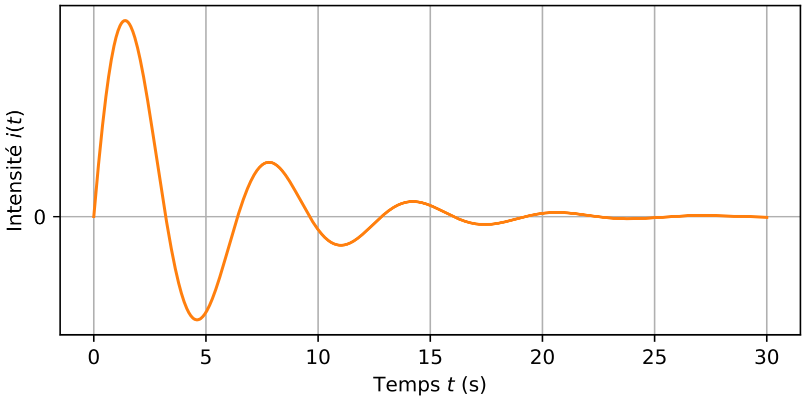
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i(t) = 0.}$$

On a $\lim_{t\to\infty} u_R(t) = 0$ par loi d'Ohm et $\lim_{t\to\infty} u_C(t) = E$ par loi des mailles, d'où

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} q(t) = CE.}$$

Graphiquement, avec $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $\gamma = 0{,}2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, on a :





8. La puissance instantanée fournie par le générateur s'exprime $\mathcal{P}_\mathrm{g} = Ei(t)$. On a donc

$$W = \int_0^\infty \mathcal{P}_\mathrm{g}\mathrm{d}t = E\int_0^\infty i(t)\mathrm{d}t = E\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = E\left[q(t)\right]_0^\infty, \quad \text{d'où} \quad \boxed{W = CE^2.}$$

D'autre part, le condensateur et la bobine n'ont pas stocké d'énergie en $t = 0$. En régime permanent, l'intensité du courant qui traverse la bobine est nulle et la tension aux bornes du condensateur vaut E : seul le condensateur a stocké de l'énergie, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{LC} = \frac{CE^2}{2}.}$$

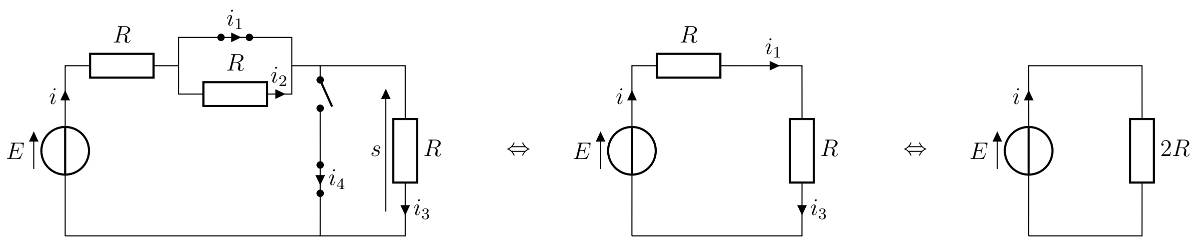
L'énergie perdue par effet Joule vaut

$$\boxed{W_J = W - \mathcal{E}_{LC} = \frac{CE^2}{2}.}$$

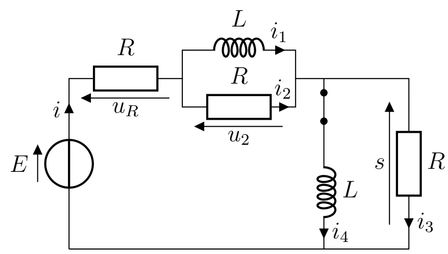
Ces résultats sont **indépendants du régime** dans lequel se trouve le circuit : les calculs ne dépendent que des états initial et final du système.
Par ailleurs, ces résultats peuvent surprendre car ils ne dépendent pas de R. En particulier, si la résistance est nulle, on obtient les mêmes résultats. En réalité, si $R \to 0$, le régime permanent n'est jamais atteint : on retrouve un oscillateur harmonique, où le générateur, le condensateur et la bobine stockent et restituent périodiquement l'énergie. Les solution analytique obtenue précédemment ne sont plus valables car l'amortissement est nul.

Exercice 7 – Circuit à deux bobines

1. En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à :



On a en effet $i_4(0^-) = 0$ car l'interrupteur est ouvert et $i_2(0^-) = 0$ car la résistance est court-circuitée par la bobine en régime permanent. On a donc $i_1(0^-) = i_3(0^-) = i(0^-) = \frac{E}{2R}$.
En $t = 0^+$, le circuit devient



L'intensité du courant qui traverse les bobines est continue, d'où

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{E}{2R} \quad \text{et} \quad i_4(0^+) = i_4(0^-) = 0.$$

De plus, par loi des nœuds, on a

$$i(0^+) = i_3(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \frac{E}{2R} + i_2(0^+).$$

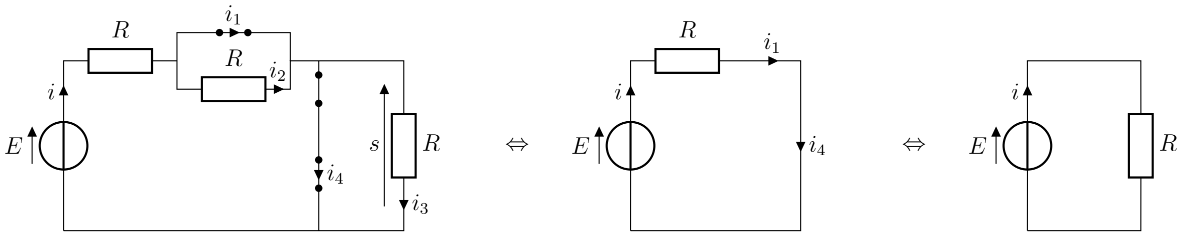
Par ailleurs, la loi des mailles donne $E = u_R(0^+) + u_2(0^+) + s(0^+)$, d'où par loi d'Ohm, $E = Ri(0^+) + Ri_2(0^+) + Ri_3(0^+)$. On divise par R et on utilise les résultats de la loi des nœuds :

$$\frac{E}{R} = i(0^+) + i(0^+) - \frac{E}{2R} + i(0^+), \quad \text{soit} \quad i(0^+) = \frac{E}{2R}.$$

Finalement

$$\boxed{\begin{cases} t = 0^- & : \quad i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-) = \dfrac{E}{2R} \quad \text{et} \quad i_2(0^-) = i_4(0^-) = 0\,; \\ t = 0^+ & : \quad i(0^+) = i_1(0^+) = i_3(0^+) = \dfrac{E}{2R} \quad \text{et} \quad i_2(0^+) = i_4(0^+) = 0. \end{cases}}$$

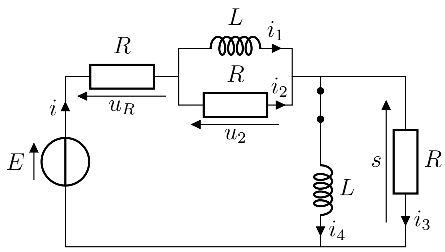
2. En régime permanent, le circuit devient :



On a alors

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{t\to\infty} i_4(t) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} i_2(t) = \lim_{t\to\infty} i_3(t) = 0.}$$

3. En $t > 0$, le circuit devient



Avec les lois de comportement de la résistance et de la bobine, on a

$$\boxed{s(t) = Ri_3(t) = L\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t}(t).}$$

On obtient immédiatement

$$\boxed{i_3(t) = \frac{s(t)}{R}.} \tag{1}$$

On dérive la loi des nœuds $i(t) = i_3(t) + i_4(t)$ et on injecte les résultats précédents :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{s(t)}{L}.} \tag{2}$$

4. Avec les lois de comportement de la résistance et de la bobine, on trouve

$$\boxed{Ri_2(t) = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(t).}$$

On dérive la loi des nœuds $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et on injecte le résultat précédent :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{R}{L}i_2(t) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t).} \tag{3}$$

5. La loi des mailles s'écrit $E = u_R(t) + u_2(t) + s(t)$, d'où avec la loi d'Ohm pour chaque résistance $E = Ri(t) + Ri_2(t) + Ri_3(t)$. On divise par R et on dérive, avec $E =$ cste, soit

$$\boxed{0 = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}(t).} \tag{4}$$

On remplace $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ dans (4) avec (3), et i_3 avec (1), soit

$$0 = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{R}{L}i_2(t) + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t),$$

puis $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ avec (2), d'où

$$0 = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{2s(t)}{L} - \frac{R}{L}i_2(t) + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_2(t) = \frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{2s(t)}{R}.} \tag{5}$$

6. On injecte (5) dans (3) puis, avec (2), on obtient

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{s(t)}{L} = \frac{R}{L}\left(\frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{2s(t)}{R}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{2s(t)}{R}\right),$$

soit, après calcul

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4R}{3L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R^2}{3L^2}s = 0.}$$

On reconnait l'équation différentielle associée à un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q, avec

$$\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{3}L} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}.$$

D'après (1) et avec la question 1, on a

$$s(t = 0^+) = Ri_3(t = 0^+) = \frac{E}{2}.$$

De plus, avec (5), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{R^2}{3L}i_2(t = 0^+) - \frac{2R}{3L}s(t = 0^+) = -\frac{RE}{3L}.$$

La résolution du problème de Cauchy

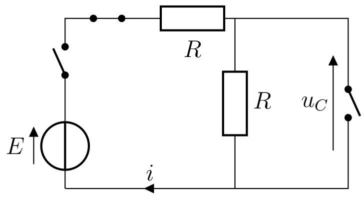
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4R}{3L}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R^2}{3L^2}s = 0\,; \\ s(t = 0^+) = \dfrac{E}{2}, \quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\dfrac{RE}{3L}, \end{cases}$$

conduit à

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{4}\left(e^{-\frac{R}{3L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\right).}$$

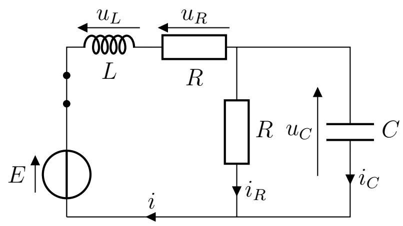
Exercice 8 – Réponse d'un circuit RLC

En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à



Le circuit est ouvert, donc $i(t = 0^-) = 0$. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue donc $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$. Par ailleurs, on remarque que $u_C(t = 0^-) = 0$ d'où, par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0$.

En $t = 0^+$ et pour $t > 0$, le circuit devient



La loi des mailles s'écrit $E = u_L(t = 0^+) + Ri(t = 0^+) + u_C(t = 0^+) = u_L(t = 0^+)$. On en déduit, par la loi de comportement de la bobine

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{i(t = 0^+)}{L} = \frac{E}{L}.$$

Pour $t > 0$, les deux lois de Kirchhoff s'écrivent

$$\begin{cases} i = i_R + i_C & \text{(loi des nœuds)}\,; \\ E = u_C + u_L + u_R & \text{(loi des mailles)}. \end{cases}$$

En injectant les lois de comportement dans la loi des nœuds en remarquant que la tension aux bornes de la résistance de droite est la même que celle aux bornes du condensateur, on trouve

$$i = \frac{u_C}{R} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

Avec l'expression de u_C issue de la loi des mailles, on obtient

$$i = \frac{1}{R}\left(E - u_L - u_R\right) + C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E - u_L - u_R\right).$$

On utilise finalement les lois de comportement pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. Après calcul, on trouve

$$\tau^2\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2i = \frac{E}{R} \quad \text{avec} \quad \tau = RC = \frac{L}{R}.$$

La résolution du problème de Cauchy conduit à (...)

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}\left(-\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{2R}.}$$