

## DS2 – Électrocinétique

### Correction

#### Exercice 1 – Soufflant électrique

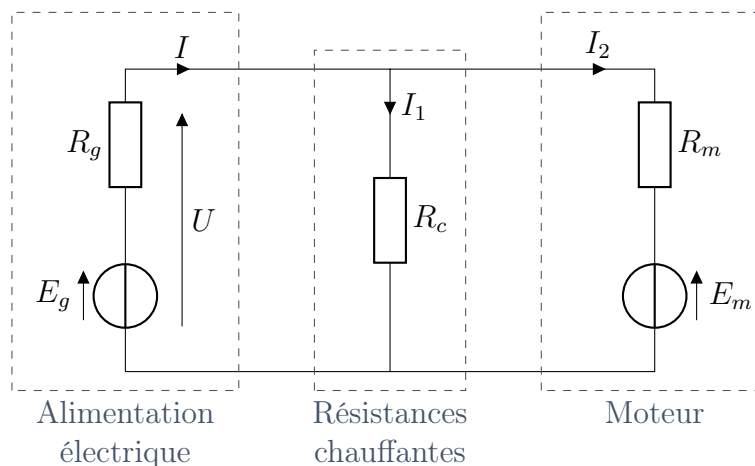
1. Pour modéliser une source réelle de tension on utilise le **modèle de Thévenin**. On a

$$U = E_g - R_g I.$$

2. On a trois résistances  $R$  associées en parallèle, d'où

$$R_c = \frac{R}{3}.$$

Le circuit simplifié devient



3. On reconnaît un pont diviseur de courant, d'où

$$I_R = \frac{I_1}{3}.$$

Les résistances dissipent l'énergie électrique reçue sous forme d'énergie thermique, c'est l'**effet Joule**.

4. On applique la loi des mailles à gauche, puis avec la loi d'Ohm, on obtient (...)

$$I_1 = \frac{E_g - R_g I}{\frac{R}{3}}.$$

On applique la loi des mailles dans la « grande maille », puis la loi d'Ohm, d'où (...)

$$I_2 = \frac{E_g - R_g I - E_m}{R_m}.$$

5. D'après la loi des nœuds,  $I = I_1 + I_2$ , d'où en remplaçant  $I_1$  et  $I_2$  par les expressions obtenues précédemment (...)

$$I = \frac{E_g \left( \frac{1}{R_m} + \frac{3}{R} \right) - \frac{E_m}{R_m}}{1 + \frac{3R_g}{R} + \frac{R_g}{R_m}}.$$

6. Avec  $R_m = R_g = R/30$ , on obtient (...)

$$I = \frac{10}{21R} (33E_g - 30E_m).$$

A.N. :  $I \approx 2,9 \text{ A}$ .

7. A.N. :  $I_1 \approx 1,7 \text{ A}$  et  $I_2 \approx 1,1 \text{ A}$ .

On vérifie  $I = I_1 + I_2$ , aux erreurs d'arrondi près.

8. La puissance  $\mathcal{P}_g$  correspond à la puissance fournie par la source idéale de tension de f.é.m.  $E_g$ , soit

$$\mathcal{P}_g = E_g I.$$

A.N. :  $\mathcal{P}_g \approx 57,1 \text{ W}$ .

Avec  $\mathcal{P}_g > 0$ , on confirme que ce dipôle se comporte comme un générateur.

9. La puissance  $\mathcal{P}_m$  correspond à la puissance reçue par la source idéale de tension de f.é.m.  $E_m$ , soit

$$\mathcal{P}_m = E_m I_2.$$

A.N. :  $\mathcal{P}_m \approx 18,3 \text{ W}$ . Avec  $\mathcal{P}_m > 0$ , on confirme que ce dipôle se comporte comme un récepteur.

10. On a

$$\mathcal{P}_c = \frac{R}{3} I_1^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_p = R_g I^2 + R_m I_2^2.$$

A.N. :  $\mathcal{P}_c \approx 29,4 \text{ W}$  et  $\mathcal{P}_p = 9,5 \text{ W}$ .

11. On a

$$\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_p \approx 57,1 \text{ W} \approx \mathcal{P}_g.$$

Toute la puissance  $\mathcal{P}_g$  fournie par l'alimentation est soit dissipée par effet Joule dans les résistances pour le chauffage ( $\mathcal{P}_c$ ) ou sous forme de pertes dans les autres résistances ( $\mathcal{P}_p$ ), soit transmise à l'hélice par l'intermédiaire du moteur ( $\mathcal{P}_m$ ). On a bien conservation de la puissance électrique.

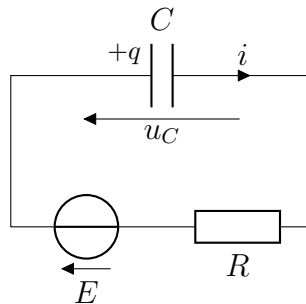
Le rendement du soufflant est défini par

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{utile}}}{\mathcal{P}_{\text{coûteuse}}} = \frac{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_g}.$$

A.N. :  $\eta \approx 83 \%$ .

## Exercice 2 – Airbag

1. Pour  $t > 0$ , le circuit devient



Avec la loi des mailles et les lois de comportements, on obtient

$$\frac{du_C}{dt}(t) + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{avec } \tau = RC.$$

En dérivant cette équation et avec la loi de comportement du condensateur, on obtient

$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{i(t)}{\tau} = 0.$$

2. En régime permanent, les deux équations différentielles donnent

$$u_{C\infty} = E \quad \text{et} \quad i_\infty = 0.$$

La courbe (a) correspond donc à  $u_C(t)$  et la courbe (b) à  $i(t)$ .

3. Le condensateur est initialement déchargé, soit  $u_C(0^-) = 0$ . Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a donc

$$u_C(0^+) = u_C(0) = u_C(0^-) = 0.$$

4. La résolution de l'équation différentielle conduit à (...)

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

En utilisant la loi de comportement du condensateur, on obtient

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}.$$

5. On discrétise l'équation différentielle en approchant la dérivée par le taux d'accroissement, de sorte que (...)

$$u_{C,k+1} = u_{C,k} + \frac{\delta t}{\tau}(E - u_{C,k}),$$

d'où

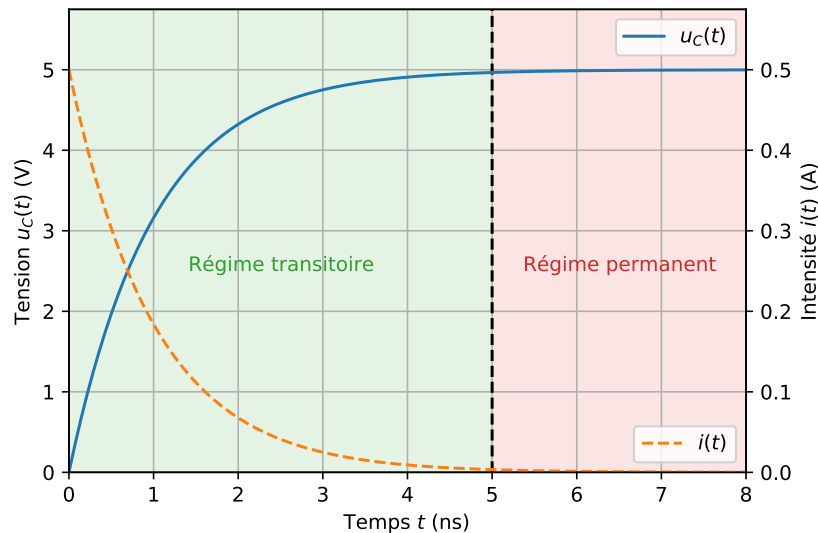
$$u[k+1] = u[k] + dt/tau * (E - u[k])$$

6. On a

$$N = \frac{8 \times 10^{-9}}{10^{-12}} + 1 \approx 8 \times 10^3.$$

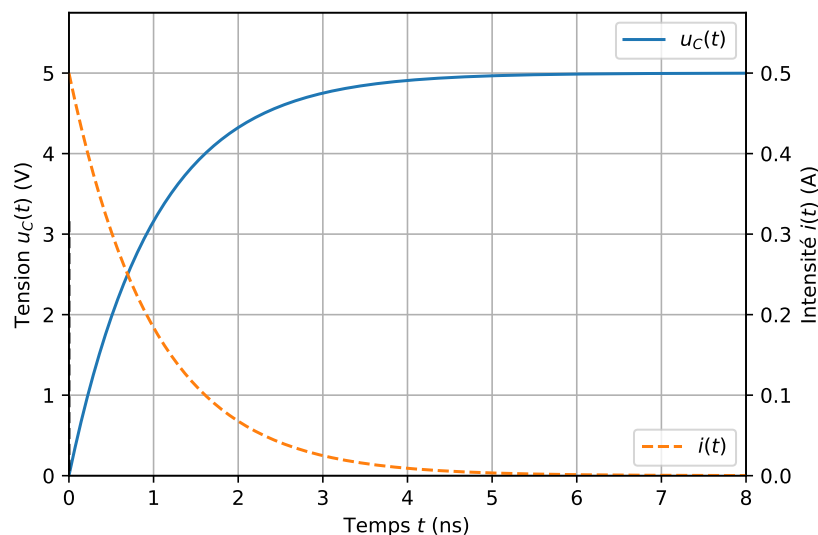
En utilisant un nombre de points bien plus important, la simulation est plus précise mais demandera un temps de calcul important. En revanche, si le nombre de points est trop faible, la simulation devient peu précise et la méthode d'Euler peut même diverger.

7. Le temps de charge correspond à la durée du régime transitoire, qui est de l'ordre de 5 ns.



8. On cherche la valeur  $\tau$  de  $t$  telle que  $u_C(\tau) = 0,63u_C(0) = 0,63E = 3,15$  V. Graphiquement, on lit

$$\tau \approx 1 \text{ ns.}$$



Le temps caractéristique du circuit est **très faible** devant la durée typique d'un choc. La mesure du temps caractéristique est donc rapide, ce qui permet de détecter un choc avant que celui-ci ne soit terminé, et ainsi de protéger efficacement les passagers en déclenchant rapidement l'airbag.

9. A.N. :  $R = 10 \Omega$ .

Sur la courbe de  $i(t)$  on lit  $i(0) = 0,5 \text{ A}$ , ce qui est cohérent avec la solution obtenue précédemment, puisque  $i(0) = \frac{E}{R} = 0,5 \text{ A}$ .

10. En régime permanent, on lit

$$\boxed{u_{C\infty} = 5 \text{ V}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_{\infty} = 0.}$$

Ces valeurs sont cohérentes avec les limites obtenues en exploitant les équations différentielles.

11. À tout instant, on a  $q(t) = Cu_C(t)$ , d'où en régime permanent

$$\boxed{q_{\infty} = Cu_{C\infty} = CE.}$$

A.N. :  $q_{\infty} = 5 \times 10^{-10} \text{ C}$ .

12. On a

$$\Delta \mathcal{E}_C = \mathcal{E}_{C\infty} - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2}Cu_{C\infty}^2, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta \mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2.}$$

A.N. :  $\Delta \mathcal{E}_C = 1,25 \text{ nJ}$ .

13. Par définition, on a

$$\mathcal{P}(t) = Ei(t), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P}(t) = \frac{CE^2}{\tau}e^{-t/\tau}.}$$

14. On a

$$\boxed{W = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(t)dt = \dots = CE^2.}$$

A.N. :  $W = 2,5 \text{ nJ}$ .

15. Dans le texte on apprend que la partie fixe s'appelle le **cadre** et la partie mobile s'appelle le **peigne mobile**.

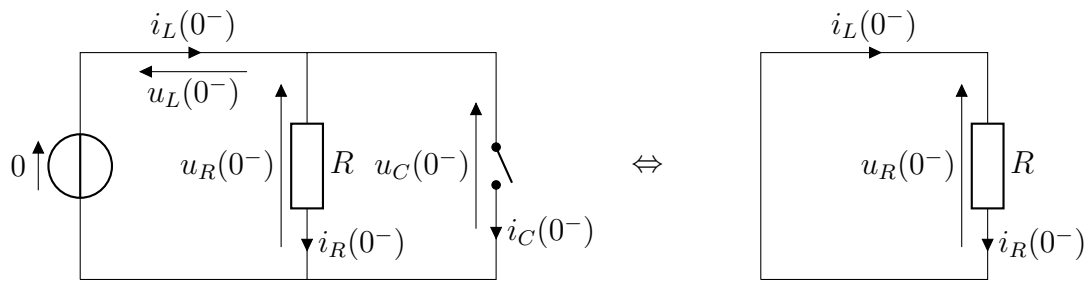
16. Plus les électrodes du condensateur sont proches et plus sa capacité augmente (l'expression de la capacité d'un condensateur est rappelée dans l'exercice suivant). Lors d'un choc, puisque les électrodes se rapprochent, la capacité du condensateur augmente, ainsi que le temps caractéristique  $\tau = RC$  du circuit.

### Exercice 3 – Circuit RLC dérivation

1. La tension  $u_C(t)$  et l'intensité  $i_L(t)$  du courant traversant la bobine sont continues car les énergies stockées par le condensateur et emmagasinées par la bobine sont continues :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t).$$

2. En  $t = 0^-$  où le régime permanent est établi et avec  $e(0^-) = 0$ , le circuit devient



Dans le circuit de gauche, on remarque que :

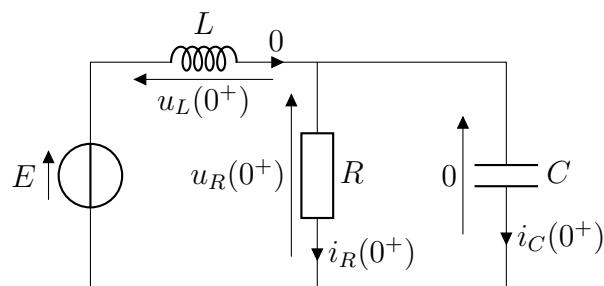
- $u_L(0^-) = 0$  car il s'agit de la tension aux borne d'un fil supposé idéal ;
- $u_C(0^-) = u_R(0^-)$  car les deux composants sont en dérivation (vrai  $\forall t$ ) ;
- $i_C(0^-) = 0$  car il s'agit de l'intensité du courant dans une branche qui comporte un interrupteur ouvert.

Dans le circuit de droite, il devient évident que :

- $u_R(0^-) = 0$  car le circuit ne comporte pas de source ;
- $i_L(0^-) = i_R(0^-)$  d'après la loi nœuds ;
- $i_R(0^-) = 0$  d'après la loi d'Ohm.

**Toutes les grandeurs électriques sont nulles en  $t = 0^-$ .**

3. La continuité de  $u_C(t)$  et  $i_L(t)$  donne immédiatement  $u_C(0^+) = 0$  et  $i_L(0^+) = 0$ . En  $t = 0^+$ , le circuit devient



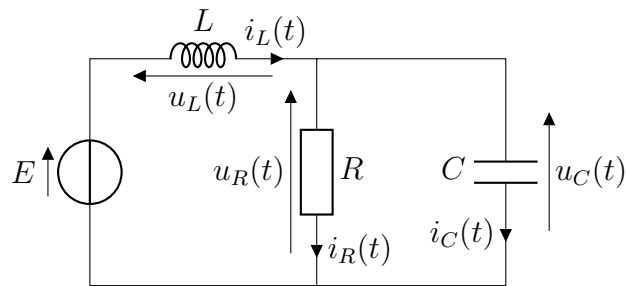
On a :

- $u_R(0^+) = 0$  car la résistance et le condensateur sont en dérivation ;
- $i_R(0^+) = 0$  par loi d'Ohm ;
- $i_C(0^+) = 0$  par loi de nœuds ;
- $u_L(0^+) = E$  par loi des mailles.

On a donc bien

$$\boxed{u_C(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 0.}$$

4. Pour  $t > 0$ , le circuit devient



On commence par la loi des nœuds :

$$i_L(t) = i_R(t) + i_C(t).$$

En utilisant les lois de comportement de la résistance et du condensateur et avec  $u_R(t) = u_C(t)$ , on obtient

$$i_L(t) = \frac{u_C(t)}{R} + C \frac{du_C}{dt}(t).$$

On dérive ensuite de manière à faire exploiter la loi de comportement de la bobine :

$$\frac{u_L(t)}{L} = \frac{1}{R} \frac{du_C}{dt}(t) + C \frac{d^2u_C}{dt^2}(t).$$

Enfin, en appliquant la loi des mailles  $E = u_L(t) + u_C(t)$  pour exprimer  $u_L(t)$  en fonction de  $u_C(t)$ , on obtient après calcul

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \frac{L}{R} \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = E.$$

5. Le polynôme caractéristique s'écrit

$$LCr^2 + \frac{L}{R}r + r.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = \frac{L^2}{R^2} - 4LC.$$

On cherche la valeur  $R_c$  de  $R$  telle que  $\Delta = 0$ , soit (...)

$$R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On observe des oscillations amorties si  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire si (...)

$$R > R_c.$$

Dans le cas limite où  $R \gg R_c$ , ce qui revient à  $R \rightarrow \infty$ , l'intensité  $i_R(t)$  devient négligeable devant  $i_C(t)$  et  $i_L(t)$  et le circuit se rapproche d'un circuit  $LC$ . Il est donc naturel d'observer une réponse oscillante.

6. On divise l'équation différentielle par  $LC$  pour obtenir

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2}(t) + \frac{1}{RC} \frac{du_C}{dt}(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{1}{LC} E.}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur de qualité  $Q$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E,$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

7. Quand le régime transitoire présente des oscillations amorties, on parle de régime **pseudo-périodique**. Les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle écrite sous forme canonique sont alors complexes et s'écrivent (...)

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

On en déduit la pseudo-pulsation :

$$\boxed{\omega = |\text{Im}(r_{\pm})| = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

On a donc  $\omega < \omega_0$ , d'où

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

8. En posant  $\tau = 2RC$ , les racines du polynôme caractéristique peuvent s'écrire

$$r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc

$$u_{C,h}(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

La solution particulière  $u_{C,p}(t) = E$  convient, d'où la solution générale de l'équation avec second membre

$$u_C(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + E.$$

La condition initiale sur  $u_C(t)$  permet d'obtenir

$$A + E = 0,$$



et celle sur sa dérivée donne (...)

$$\frac{A}{\tau} = B\omega,$$

d'où (...)

$$A = -E \quad \text{et} \quad B = -\frac{E}{\omega\tau}.$$

On obtient donc finalement

$$u_C(t) = E \left( 1 - e^{-t/\tau} \left( \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right) \right).$$

9. Le temps caractéristique associé à la durée du régime transitoire est  $\tau$ .
10. Puisque les électrons sont massifs, il ne peuvent quitter instantanément les électrodes du condensateur. La **charge  $q$  est donc conservée**.  
Si l'épaisseur est divisée par deux, la capacité du condensateur est doublée d'après l'expression donnée dans l'énoncé, soit

$$C' = 2C.$$

La tension est donc divisée par deux car  $q = Cu$ , soit

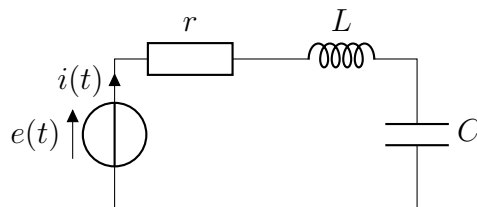
$$u' = \frac{u}{2}.$$

Enfin l'énergie stockée par le condensateur est divisée par deux, car

$$\mathcal{E}'_C = \frac{1}{2}C'u'^2 = \frac{1}{4}Cu^2 = \frac{\mathcal{E}_C}{2}.$$

## Exercice 4 – Analyse d'un relevé expérimental

1. L'amortissement des oscillations s'explique par la présence d'une résistance dans le circuit : la **résistance interne du GBF**. Le circuit étudié est donc bien un circuit *RLC*.



2. Dans ce circuit, l'intensité du courant vérifie l'équation d'un oscillateur amorti de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur de qualité  $Q$  :

$$\frac{d^2i}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt}(t) + \omega_0^2 i(t) = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Sur le graphique de  $i(t)$ , on remarque que le régime transitoire est pseudo-périodique, donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$i(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad \text{avec } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Le générateur délivre un échelon de tension de la forme

$$e(t) = \begin{cases} E_- & \text{si } t < 0 \\ E_+ & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } E_+ - E_- = E.$$

Les valeurs  $E_-$  et  $E_+$  sont sans importance et ne pourront pas être déterminées, seule la hauteur de l'échelon  $E$  est accessible. Dans ce cas, on a

$$i(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}.$$

On en déduit donc

$$i(t) = \frac{E}{L\omega} e^{-t/\tau} \sin(\omega t).$$

Sur le graphique :

- on remarque que le régime transitoire comporte de nombreuses oscillations. On en compte plus d'une dizaine, ce qui permet de donner une borne inférieure au facteur de qualité, soit  $Q > 10$  environ. Dans ces conditions, la pseudo-pulsation et la pulsation propre sont très proches. On a donc

$$\omega_0 \approx \frac{2\pi}{T};$$

De plus, on mesure la pseudo-période des oscillations :

$$T \approx 0,125 \text{ ms};$$

- l'enveloppe exponentielle permet de déterminer l'amplitude initiale  $I_0$  des oscillations, qui d'après la solution vaut  $\frac{E}{L\omega}$ . En  $t = 0$ , on lit

$$I_0 = \frac{E}{L\omega} \approx -5 \text{ mA}.$$

Le signe  $-$  est confirmé par le signe de la dérivée première de  $i(t)$  en  $t = 0$ ;

- enfin, le temps caractéristique de décroissance de l'amplitude des oscillations, donnée par l'enveloppe exponentielle, permet d'accéder à  $\tau$ . Graphiquement, l'amplitude initiale est réduite de 63 % (soit une amplitude de 1,85 mA) après un temps

$$\tau \approx 0,8 \text{ ms}.$$

On a donc

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \approx \frac{2\pi}{T} \\ \frac{E}{L} = I_0 \omega \\ \frac{2L}{r} = \frac{2Q}{\omega_0} = \tau \end{cases}$$

Le générateur est un GBF donc  $r = 50 \Omega$ . La résolution du système permet finalement d'obtenir

$$\boxed{L = \frac{r\tau}{2} \approx 20 \text{ mH}}, \quad \boxed{E = I_0 L \frac{2\pi}{T} \approx -5 \text{ V}} \quad \text{et} \quad \boxed{C \approx \frac{T^2}{4\pi^2 L} \approx 20 \text{ nF}}.$$

Les valeurs sont raisonnables pour du matériel utilisé en TP.

